جمعية أصدقاء الرياضيات

ASSOCIATION DES AMIS DE MATHEMATIQUES

Bac Blanc   Epreuve de Maths

Niveau : 7C   *Durée :4h*   *Proposée le 22 mai 2018 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

1) On considère dans Z^2 l'équation (E) : $4x + 11y = 2018$

a) Montrer que pour tout couple (x, y) solution de (E), y est un nombre pair.

b) Vérifier que le couple (499,2) est une solution particulière de (E).

c) Résoudre (E).

2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x, y) est une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b) Existe – t – il un couple (p, q) d'entiers naturels tels que 4m + 11d = 2018, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm ? Justifier.

Exercice 2(4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i = 0$

1.a) Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation (E) puis résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

b) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E) .

2) Soit θ un réel et E_θ l'équation : $z^3 - 2e^{i\theta}(\sqrt{3} + i)z^2 + 4e^{2i\theta}(1 + i\sqrt{3})z - 8ie^{3i\theta} = 0$.

a) Démontrer que $(ze^{-i\theta})$ est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de E_θ.

b) En déduire les solutions de l'équation (F) : $z^3 + 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z + 8i = 0$.

3) pour $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$; on pose $f(z) = \frac{z}{z+i}$.

a) montrer que $f(e^{i\alpha}) = \frac{1}{2}\left(1 + i\tan\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

b) Montrer que si $f(z) = e^{i\theta}$ alors $z = -\frac{1}{2}\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\right)$

c)En déduire une écriture algébrique des solutions de l'équation : $z^4 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(z + i)^4$

Exercice 3 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct ABCD tel que $AB = 1$ et $BC = 2$. On appelle M le milieu du segment $[BC]$, N le milieu du segment $[AD]$ et E le symétrique de M par rapport à N

1)Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

2-a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en N et M en E.

b) Préciser l'angle et le centre de r

c) On pose $f = S_{MN} \circ r$ determiner $f(A)$ et $f(B)$ puis déterminer la nature de f et la caractériser.

3) Soit S la similitude directe telle que : $S(A) = M$ et $S(B) = D$. Déterminer le rapport et l'angle de S.

4) On se propose dans cette question de préciser la position du centre P de la similitude S.

a) Les droites (AB) (DM) se coupent en I. Démontrer que les points A ,P,M et I sont cocycliques . En déduire que : $BM = BP = BA$.

b) Démontrer que $DM = DP$. En déduire que P est le symétrique de M par rapport à la droite (BD).

5) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct tel que $z_A = 0$, $z_B = 1$ et $z_D = 2i$.

a) Déterminer l'expression complexes de S et l'affixe de P.

b) Vérifier que P est bien le symétrique de M par rapport à la droite (BD) en montrant que $BM = BP$ et que les droites (PM) et (BD) sont orthogonaux.

6) pour tout entier naturel. On définit une suite de points (L_n) par : $L_0 = D$ $L_{n+1} = S'(L_n)$ où S' est la réciproque de S . On pose $d_n = L_0L_1 + L_1L_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + L_nL_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Placer les points L_0, L_1, L_2 et donner une expression simple de d_n

b) Calculer la limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et l'interpréter.

c) Montrer que les points P, L_2, L_{2018} sont alignés

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x} & , x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1.a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0^+.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé$(O, \vec{i}\ \vec{j})$.

2) On cherche à calculer l'intégrale : $L = \int_1^e \frac{1}{t}\left(f(t)\right)^3 dt$

a) Calculer les intégrales : $I = \int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln t)}$ et $J = \int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln t)^2}$

b) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\left(f(t)\right)^2 = a + \frac{b}{1+\ln t} + \frac{c}{(1+\ln t)^2}$

c) Calculer l'intégrale : $K = \int_1^e \frac{1}{t}\left(f(t)\right)^2 dt$

d) En utilisant une intégration par parties montrer que : $L = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}K$. Calculer L.

Exercice 5 (6 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^x$.

C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2cm.

Partie A

1)- Montrer que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées .

2)-a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$

b) Etudier suivant la parité de n , $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.

3)- a) Dresser le tableau de variation de f_1 et de f_2

b)- Etudier la position relative de C_1 et C_2

c)- Tracer C_1 et C_2 dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4) a) On pose : $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.Déterminer les réels a, b et c tels que G soit une primitive de $f_1 - f_2$ sur $\mathbb{R}$

b)-Calculer l'aire du domaine plan limité par les courbes C_1 et C_2 et les droites $x = 0$ et $x = 1$

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $\varphi_n(x) = \int_0^{1-\frac{x}{2}} f_n(t)dt$

1) a)- Calculer $\varphi_1(x)$ au moyen d'une intégration par parties.

b)-Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \varphi_1(x) = -2$

c)- En intégrant par parties $\varphi_{n+1}(x)$ montrer que : $\varphi_{n+1}(x) = (n+1)\varphi_n(x) - 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} ee^{-\frac{x}{2}}$

d)-Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} ee^{-\frac{x}{2}} = 0$

2)a)- Montrer par récurrence φ_n admet en $+\infty$ une limite finie L_n et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $L_{n+1} = -1 + (n+1)L_n$

b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $L_n = -n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \frac{\varphi_n(0)}{n!}$

a) Calculer ! U_1

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$

c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq U_n \leq \frac{e}{n!}$

e)En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Fin.