EPREUVE DE MATHS 1er BAC BLANC

Niveau : 7D *Durée :4H* *Proposée le 29 décembre 2023 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

Le 1^{er}Janvier 2023 une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que chaque année avenir , 10% de l'effectif de l'entreprise au 1^{er}Janvier partira à la retraite au cours de l'année, et l'entreprise embauche 100 nouveaux jeunes dans la même année.

Pour tout entier naturel n on appelle U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1^{er}Janvier de l'année $(2023+n)$ et on pose $V_n = U_n - 1000$. On sait que $U_0 = 1500$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre d'employés au 1^{er} janvier 2024 :	$U_1 = 1600$	$U_1 = 1585$	$U_1 = 1450$
2	Le nombre d'employés au 1^{er} janvier 2025 :	1405	1450	1590
3	La suite (U_n) est :	Géométrique	arithmétique	Ni arithmétique, ni géométrique
4	La suite (U_n) vérifie pour tout n :	$U_{n+1} = 0,9U_n + 100$	$U_{n+1} = 0,9U_n$	$U_{n+1} = U_n + 90$
5	Le terme général de la suite (V_n) est :	$V_n = 500\times(-0,9)^n$	$V_n = 500\times(0,9)^n$	$V_n = -500\times(0,9)^n$
6	La suite (V_n) est :	Convergente	Divergente	Croissante

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 10 = 0$

2) On considère le polynôme P définie par :

$$P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + (10+4i)z - 20i$$

a)Calculer $P(2i)$ et Déterminer des nombres complexes a et b tels que pour tout z :

$$P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$$

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$

3) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On considère les points A ;B et C d'affixes respectives : $2i\,;1+i$ et $1+3i$.et pour tout $z \neq 1+3i$ on pose :$f(z) = \frac{z-1-i}{z-1-3i}$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Résoudre l'équation $f(z) = -i$. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer z_D affixe du point D pour que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme.

4.a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$..

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que $f(z)$ est imaginaire pur.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M d'affixe z tels que$|f(z) - 1| = \sqrt{2}$

d) Justifier que le point A est commun aux ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3.

Exercice 3 (5 points) *(Dans cet exercice, traitez au choix l'une des parties A ou B)*

Partie A (Suites numériques)	Partie B (Fonctions numériques)
On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ Et soit (V_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = 4U_n - 6n + 15$ 1. Calculer U_1 et U_2. 2.a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q. b) Exprimer V_n en fonction de n . c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$ d) Calculer la limite des suites (V_n) et (U_n). 3.a) Montrer que la suite (U_n) peut s'écrire sous la forme $U_n = w_n + t_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ où (w_n)est une suite géométrique et (t_n) est une suite arithmétique. b) Calculer en fonction de n les trois sommes : $W_n = w_0 + w_1 + \cdots w_n$, $T_n = t_0 + t_1 + \cdots t_n$, et $S_n = U_0 + U_1 + \cdots U_n$. c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2}$.	Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1, +1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = x^3 - 3x - 4$. a) Dresser le tableau de variations de la fonction g. b) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $2 \le \alpha \le 3$ puis déterminer une valeur approchée de α à 5.10^{-1} près. c) Etudier le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$. 2) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition : $\pm\infty, -1^-, -1^+, 1^-, 1^+$. 3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \backslash \{-1, +1\}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f. 4.a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \backslash \{-1, +1\}$, $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$. En déduire que C admet une asymptote oblique D à l'infini. Etudier la position de C par rapport à D. b) Tracer la droite D, ainsi que la courbe C .

Exercice 4 (5 points)

On considère le polynôme $P(z)$ définie pour tout nombre complexe z par :

$P(z) = z^3 - (8 + 7i)z^2 + (-3 + 35i)z + 54 - 42i$

1.a) On pose $u = 48 + 14i$ donner les racines carrées du nombre complexe u.

b) Calculer $P(3)$.

c) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$

d) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$

2. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = -1 + 3i$ et $z_C = 6 + 4i$

Et pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 6 + 4i$ on pose : $f(z) = \frac{Z+1-3i}{Z-6-4i}$

a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Calculer $f(z_A)$ et $\alpha = f(7 - 3i)$ puis donner leurs formes algébriques et trigonométriques.

c) En déduire la nature du triangle ABC.

3) On pose $\forall n \geq 0 \quad Z_n = \alpha^n$ et soit M_n le point d'affixe Z_n.

a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels pour que $M_n \in (Ox)$.

b) Les points M_{2023} et M_{2024} appartiennent-ils à l'axe des abscisses (Ox) ? Justifier votre réponse.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = |Z_{n+1} - Z_n|$.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

b)On pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Rédaction et présentation : 2 points

Fin.