DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7D	*Durée : 4h*	*Proposé le 04 février 2017 de 8h à 12h*

Exercice 1 : (3 points)

Pour chaque question, de cet exercice, une seule réponse est exacte, l'élève doit l'indiquer en recopiant et en remplissant sur sa copie le tableau ci-contre	*Question*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
	Réponse						

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1° L'ensemble de définition de f est	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-3}{2}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-3}{2};2\right\}$
2° Le nombre d'asymptotes de (C) est	0	1	2
3° (C) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées	$(2;0)$	$(0;2)$	$(-1.5;0)$
4° La dérivée f' de f est définie par :	$f'(x)=\frac{-7}{(x-2)^2}$	$f'(x)=\frac{7}{(x-2)^2}$	$f'(x)=\frac{4x-1}{(x-2)^2}$
5° la fonction f est	paire	impaire	ni paire, ni impaire
6° La courbe (C) est symétrique par rapport :	à la droite d'équation $x=2$	au point de coordonnées $(2;0)$	au point de coordonnées $(2;2)$

Exercice 2 : (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=-2$ et pour tout entier $n\geq 1$ on a $u_{n+1}=\frac{n}{2n+2}u_n-\frac{1}{n+1}$

1° a) Calculer u_1, u_2 et u_3 — 0.75 pt

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? — 0.5 pt

c) Etudier la monotonie de la suite (u_n) — 0.25 pt

d) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<0$ — 0.25 pt

2° On considère la suite (v_n) définie par $v_n=nu_n+2$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. — 1 pt

b) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n. — 1 pt

c) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n$. — 0.5 pt

3° On définit la suite (w_n) par $w_n=nu_n$ et soit $S_n=w_0+w_1+w_2+...+w_n$

a) Donner l'expression de w_n à l'aide de v_n — 0.25 pt

b) Calculer la somme $S'_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$ puis en déduire la valeur de S_n — 0.25 pt

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ — 0.25 pt

Exercice 3 : (5 points)

1° Soit $P(z)=z^3-7z^2+19z-13$, où z est un complexe

a) Calculer $P(1)$ et déterminer deux réels a et b tels que $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$ — 0.75 p

b) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$. — 0.5 pt

2°Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = \frac{7-4i}{1-2i}$ et $z_C = \frac{1-5i}{1-i}$.

a) Donner la forme algébrique de z_A et z_B **0.5 pt**

b) Placer les points A, B et C **0.5 pt**

c) Déterminer et construire le point D tel que ABDC soit un parallélogramme. **0.5 pt**

3° Soit f l'application définie pour tout complexe $z \neq 3-2i$ par $f(z) = \frac{z-3-2i}{z-3+2i}$

a) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants : **1.5 pt**

Γ_1 tels que $|f(z)| = 1$; Γ_2 tel que $\arg(f(z)) = \frac{-\pi}{2}$; Γ_3 tel que $|f(z)-1| = 2$

b) Calculer le nombre $\alpha = f(7-2i)$ et l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique **0.5 pt**

c) Donner la forme exponentielle de α^{2017}. **0.25 pt**

<u>Exercice 4</u> : (7 points)

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{2x+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1° a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de ce domaine. **0.75 pt**

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation **1.25 pt**

2° a) Déterminer les réels a,b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x+2}$ **0.5 pt**

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique Δ, dont on donnera l'équation. **0.25 pt**

c) Etudier la position relative entre (C) et Δ **0.25 pt**

3° a) Construire la courbe (C) et ses asymptotes. **0.75 pt**

b) Montrer que (C) admet un centre de symétrie que l'on précisera. **0.25 pt**

4° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$

a) Montrer que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. **0.25 pt**

b) Déterminer $g^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{7}{4}\right)$. **0.5 pt**

c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α que l'on déterminera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près. **0.25 pt**

d) Tracer, dans le même repère, la courbe (C') de la fonction g^{-1}. **0.25 pt**

5° On considère l'intervalle $I = [2;3]$

a) Montrer que, $\alpha \in I$ implique que $\forall x \in I$, $f(x) \in I$ **0.5 pt**

b) Montrer que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ **0.25 pt**

6° Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. **0.25 pt**

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. **0.25 pt**

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ **0.25 pt**

d) En déduire la limite de (u_n). **0.25 pt**

Fin.