DEVOIR DE MATH

Niveau : 7D	*Durée :4h*	*Proposé le 11/02/2018 de 8h à 12h*

EXERCICE 1 (3 POINTS)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, avec justification, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Les racines carrées de : $5-12i$ sont :	$3+2i$ et $-3-2i$	$-3+2i$ et $3-2i$	$2+3i$ et $-2-3i$
2	Si $z+2\bar{z}-3-i=0$ alors :	$z=1+i$	$z=-1+i$	$z=1-i$
3	$f(x)=x+\frac{1}{x}$ alors :	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(1)=0$	La droite $y=1$ est une AH
4	Si $f(4-x)=6-f(x)$ alors la courbe de f est symétrique par rapport à :	A(2;6)	A(2;3)	La droite d'équation $x=4$
5	Si $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x+1}$ et $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ alors :	$a=1$; $b=-4$ et $c=3$	$a=1$; $b=4$ et $c=2$	$a=1$; $b=4$ et $c=-2$
6	La tangente à la courbe de la fonction $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$ en $x_0=0$ a pour équation:	$y=x$	$y=x+1$	$y=x-1$

EXERCICE 2 (4 POINTS)

Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)U_n$

1.a) Calculer u_1 et u_2

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{2n+5}{2n+3}\leq\frac{5}{3}$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $0\leq U_{n+1}\leq\frac{5}{6}U_n$

c) Prouver alors que $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n\leq 3\left(\frac{5}{6}\right)^n$ et calculer la limite de la suite (u_n).

2) Pour tout entier naturel n on pose : $v_n=\frac{u_n}{2n+3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b) Calculer v_0 et exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

EXERCICE 3 (5 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère le polynôme: $P(z)=z^3-(5+7i)z^2+(-6+26i)z+24-24i$

1.a) Calculer $P(2)$ **.**

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout nombre z : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

c) Déterminer les racines carrées de : $8-6i$

d) Déterminer les solutions z_0 **,** z_1 **et** z_2 **de l' équation P(z)=0 avec** $|z_0|\le|z_1|\le|z_2|$ **.**

2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $4i$ **,** 2 **et** $3+3i$**. On pose :** $f(z)=\dfrac{z-2}{z-4i}$

a) Placer les points A ,B et C .

b) Calculer $f(z_C)$ **et interpréter le résultat**

c) Déterminer et construire Γ_1 **l'ensemble des points** M **d'affixe** z **tel que** $f(z)$ **soit imaginaire pur.**

d) Déterminer et construire Γ_2 **l'ensemble des points** M **d'affixe** z **tel que** $|f(z)-1|=2$

EXERCICE 4 (8 POINTS)

Partie A

Soit la fonction numérique définie par $g(x)=x^3-3x-4$

1) Dresser le tableau de variation de g **.**

2) Montrer que l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α **dans** $\mathbb{R}$ **et que** $2<\alpha<3$ **.**

3) Donner le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$ **.**

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ **et soit** (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Montrer que $\forall x\in D_f$, $f(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$

b) En déduire que la courbe (C) **admet une asymptote oblique** Δ **à préciser puis étudier la position relative de** (C) **et** Δ **.**

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3) Montrer que $\forall x\in D_f$, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$**. En déduire le signe de** $f'(x)$ **sur** D_f **(On pourra utiliser A.3).**

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Déterminer les points de (C) **où la tangente est parallèle la droite d'équation** $y=x+2$ **.**

6) Donner une équation de la tangente de (C) **en** $x_0=-2$

7) Construire la courbe (C)

8) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty;-1[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $(h^{-1})'(0)$**.**

Fin.