DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7D	Durée :4H	Proposé le 26 mai 2017 de 8h à 12h

Exercice 1 (3 points)

Dans un laboratoire, on a fait les constats suivants concernant deux types d'anticorps A et B :
60% des souris porte l'anticorps A. 25% des souris porte l'anticorps A et B simultanément. La probabilité qu'une souris porte l'anticorps A, sachant qu'elle ne porte pas l'anticorps B, est égale à $\frac{5}{9}$.

On choisit une souris au hasard dans le laboratoire. On définit les évènements suivants :
A : «La souris porte l'anticorps A » ; C : «La souris porte au moins l'un des anticorps A et B»;
B : «La souris porte l'anticorps B» ; D : «La souris ne porte aucun des anticorps A et B».

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La probabilité $p(A)$ est :	0.6	0.06	0.5
2	La probabilité $p(B)$ est :	0.63	0.37	0.77
3	La probabilité $p(C)$ est :	0.72	0.97	0.98
4	La probabilité $p(D)$ est :	0.03	0.3	0.28
5	La probabilité $p_A(B)$ est :	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{25}{37}$
6	La probabilité $p_A(\overline{B})$ est :	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{9}$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E): $z^2-4z+16=0$

1.a) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $\text{Im}(z_1)>0$.

b) Donner la forme trigonométrique des nombres z_1 et z_2.

2) Le plan complexes est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=2+2i\sqrt{3}, z_B=2-2i\sqrt{3}$ et $z_C=-4$

a) Placer les points A, B et C dans le repère et déterminer la nature du triangle ABC.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer D.

3) Pour tout nombre $z\neq-4$, on pose : $f(z)=\dfrac{z-2+2i\sqrt{3}}{z+4}$.

a) Calculer le nombre $\alpha=f(-2-2i\sqrt{3})$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=4\sqrt{3}$

4)Pour tout entier naturel n, on pose $z_n=\alpha^n$ (où α est le nombre calculé à la question 3.a-) .

a) Montrer que pour tout n, $z_{n+3}=z_n$. Que peut-on dire de la suite de nombres complexes (z_n) ?

b) On note $U_n=|z_n|$. Que peut-on dire de la suite (U_n) ?

Exercice 3(6 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x^2-3+\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α telle que $1{,}1<\alpha<1{,}2$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x+\dfrac{2-x-\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et en donner une interprétation géométrique.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)$.En déduire que (C) admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$

c) Etudier la position relative de (C) et (Δ).

2.a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\alpha)=\dfrac{4\alpha^2-\alpha-1}{\alpha}$ et en donner une valeur approchée.

3.a) Tracer (C) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

b) Donner une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

c) Calculer l'aire, en centimètre carré, du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-4x+4)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que la courbe C admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variation f.

3) Déterminer l'intersection de C avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;2]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;2]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 et calculer $(g^{-1})'(e)$.

5.a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=2$.

6) Soit $U_n=\int_0^{\frac{2}{n}} f(x)dx$. n est un entier naturel non nul.

a) Calculer U_1 et l'interpréter graphiquement.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive.

c) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0$ et interpréter graphiquement.

Fin.