DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7D	*Durée :4H*	*Proposé le 24 mai 2019 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

Dans un laboratoire, on considère un lot de 10 machines fonctionnant de manière indépendante pour détecter les anticorps. La durée de vie d'une machine, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.2$
Une machine a donné les résultats suivants concernant deux types d'anticorps A et B :
60% des souris porte l'anticorps A et 25% des souris porte l'anticorps A et B simultanément.
On choisit une souris au hasard dans le laboratoire. On définit les évènements suivants :
A : «La souris porte l'anticorps A » ; B : «La souris porte l'anticorps B».

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La probabilité $p(A)$ est :	0.6	0.06	0.5
2	La probabilité $p(A \cap B)$ est :	0.75	0.5	0.25
3	La probabilité $p_A(B)$ est :	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{25}{37}$
4	La probabilité qu'une machine fonctionne sans panne au cours des deux premières années est :	$e^{-0.4}$	$e^{-0.2}$	$1-e^{-0.4}$
5	Sachant qu'une machine a fonctionné sans panne au cours des deux premières années, quelle est la probabilité qu'elle soit encore en état de marche au bout de six ans ?	$e^{-1.2}$	$e^{-0.8}$	$1-e^{-0.8}$
6	La probabilité que, dans ce lot de 10 machines, il y ait au moins une machine qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est :	$1-e^{-2}$	$\left(1-e^{-0.4}\right)^{10}$	$1-\left(1-e^{-0.4}\right)^{10}$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Pour tout nombre complexe z on pose :
$P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - (9-i)z - 6 + 18i$.

1.a) Calculer $P(3i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z-3i)(z^2+az+b)$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexes est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3+i$, $z_B = 3i$ et $z_C = -2$

a) Placer les points A, B et C dans le repère et déterminer la nature du triangle ABC.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer D.

3) Pour tout nombre $z \neq -2$, on pose : $f(z) = \dfrac{z-3-i}{z+2}$.

a) Calculer le nombre $\alpha = f(1-2i)$ puis l'écrire sous forme algébrique et interpréter.

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1| = \sqrt{26}$

d) Déterminer Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+(x-1)e^{x}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2+xe^{x}$.

a) Dresser le tableau de variation de *g*.

b) En déduire le signe de *g* (x) pour tout réel x.

2.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

4.a) Calculer f'(x) puis dresser le tableau de variation de *f*.

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$ .Vérifier que $0,4 < x_0 < 0,5$.

5.a) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente T à la courbe est parallèle à l'asymptote (D). Donner l'équation de T.

b) Tracer (C) , T et (D).

c) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-1-me^{-x}=0$.

Exercice 4 (7 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x^2-3+\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g .

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α telle que $1,1<\alpha<1,2$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x+\frac{2-x-\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm .

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et en donner une interprétation géométrique.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)$.En déduire que (C) admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$

c) Etudier la position relative de (C) et (Δ).

2.a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Vérifier que $f(\alpha)=\frac{4\alpha^2-\alpha-1}{\alpha}$ et en donner une valeur approchée.

3.a) Tracer (C) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm .

b) Donner une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

c) Calculer l'aire A, en centimètre carré, du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4) Pour tout entier naturel $n\geq1$ on pose: $U_n=\int_{1+\frac{1}{n}}^{e} f(x)dx$

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n) puis exprimer U_n en fonction de n.

b) Montrer que la suite (U_n) est positive et croissante.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et en donner une interprétation géométrique. **Fin.**