DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7C	*Durée :4H*	*Proposée le 04 mai 2025 de 8h à 12h*

Exercice 1 (4 points)

1) Dans $\mathbb{Z}^2$, on considère l'équation E : $2x-3y=1$.

a) Vérifier que (-1,-1) est une solution de E puis la résoudre.

b) Justifier que la fraction $\frac{3m-1}{2m-1}$ est irréductible.

2.a) Trouver tous les entiers relatifs N vérifiant : $\begin{cases} N \equiv 2\,[8] \\ N \equiv 3\,[9] \\ N \equiv 6\,[12] \end{cases}$

b) Les observatoires astronomiques ont observé il y a six ans l'apparition de trois comètes A, B et C simultanément. La comète A est visible tous les 8 ans. La comète B est visible tous les 9 ans. La comète C est visible tous les 12 ans.
Dans combien d'années pourra-t-on observer simultanément les comètes A, B et C ?

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(3+4i)z^2+(1+7i)z+2-10i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z-2i)(z^2+az+b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

c) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\text{Im}(z_A)<\text{Im}(z_B)<\text{Im}(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$ et placer les points A ,B ,C et G.

2) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M)=MA^2-2MB^2+2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=m$, où m est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de m, la nature de Γ_m.

b) Reconnaître et tracer Γ_{14}.

3) Soit s la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a) Donner l'expression complexe de s et calculer son rapport λ.

b) Soit θ un angle de s. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O et de coté a, $(a>0)$. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$.

1) Faire une figure illustrant les données précédentes.

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en B et L en I. Préciser le centre et un angle de r_1.

b) Préciser le centre et un angle de la rotation r_2 qui transforme J en L et D en O.

c) Caractériser $f_1=r_1\circ r_2$ et $f_2=r_2\circ r_1$.

2) Soit M un point variable du plan. On note $M'=r_1(M)$ et $M''=r_2(M)$.

a) Montrer que si $M'\neq M''$, alors la droite $(M'M'')$ passe par un point fixe.

b) On suppose que M est situé sur la droite (AB) et est distinct de A et B. Montrer que les points O, M M' et B sont cocycliques.

3.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme J en L et K en I.

b) Montrer que g est une symétrie glissante et vérifier que $g(D) = O$.
c) Donner la forme réduite de g.
4) Soit M_0 un point du plan. On note $M_1 = g(M_0)$ et pour tout entier naturel n : $M_{n+1} = g(M_n)$.
On pose $S_n(M_0) = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_{n-1}M_n$
Calculer en fonction de a et n : $S_n(D)$ et $S_n(J)$.

<u>Exercice 4 (6 points)</u>
On considère la fonction $g(x) = x - \ln(e^x - x)$.
1.a) Montrer que pour tout réel x, on a $e^x > x$. En déduire que le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Donner une interprétation graphique.
c) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, puis calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$.
2.a) Vérifier que $g'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$ et dresser le tableau de variation de g.
b) Tracer Γ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
3) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$.
a) Vérifier que $f(x) = e^{g(x)}$.
b) Déduire de la question 1) : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Donner une interprétation graphique.
c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe Γ' dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$
3) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Montrer que $1 \le A \le \frac{e}{e-1}$. On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de A.
4) Pour tout entier naturel n , on pose: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$, pour $n \in \mathbb{N}^*$; et $I_0 = 1$
a) Calculer I_1 , (On pourra utiliser une intégration par parties).
b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$ on a , $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
5) On pose pour tout entier naturel n : $S_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_n$.
a) Justifier que : $S_n = \int_0^1 \frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$.
b) Montrer que : $A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$.
c) Montrer que : $0 \le A - S_n \le \frac{2}{n+2}$. En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = A$.
d) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$, A soit une valeur approchée de S_n à 10^{-3} près.

Fin.