BAC BLANC

Niveau : 7C	*Durée : 4h*	*Proposé le 25 Déc 2024 de 8h à 12h*

EXERCICE 1 (4 POINTS)

1) Pour tout entier $n \geq 2$, soit $R_n(X) = a_nX + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$. C'est-à-dire que pour tout X, $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + a_nX + b_n$.

Montrer que $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$.

2) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est inversible et vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$

b) Déduire la valeur de la matrice A^{-1}.

3) Déduire la valeur de A^n, pour $n \geq 2$.

EXERCICE 2 (5 POINTS)

1° On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $43x - 31y = 6$.

a) Déterminer l'entier p tel que $(4p, 5p+2)$ soit une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

c) Déterminer les solutions de (E) telles que $|x - 23| \leq 25$.

2° On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^{29} \equiv 7\ [31]$.

a) Soit x une solution de l'équation (F). Montrer que x et 31 sont premiers entre eux, puis que : $x^{30} \equiv 1\ [31]$

b) Montrer que : $7x \equiv 1\ [31]$, en déduire que $x \equiv 9\ [31]$.

c) Donner l'ensemble des solutions de (F) dans $\mathbb{Z}$.

3° On considère dans $\mathbb{Z}$ le système d'équations (S) : $\begin{cases} n^{43} \equiv 3\ [43] \\ n^{29} \equiv 7\ [31] \end{cases}$.

a) Soit n une solution du système (S). Montrer que n est solution du système (S') : $\begin{cases} n \equiv 3\ [43] \\ n \equiv 9\ [31] \end{cases}$.

b) En déduire que : $n \equiv 691\ [1333]$.

c) Soit l'entier naturel qui s'écrit $A = \overline{(a-1)10aa}$ en base cinq. Déterminer a sachant que A est solution de (S) puis donner l'écriture décimale de A.

EXERCICE 3 (5 POINTS)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):(1-i)z^2+2i(m+1)z-(1+i)(1+m^2)=0$ où m est un paramètre complexe.

1° a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On désigne par z_1 et z_2 ses solutions.

b) Déterminer les formes trigonométriques des complexes m pour lesquels l'équation (E) admet deux solutions inverse l'une de l'autre.

2° Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points M, I, A, M_1 et M_2 d'affixes respectives : $m, 1, 1-i, z_1$ et z_2.

a) Montrer que, pour $M \neq I$, le triangle AM_1M_2 est rectangle isocèle en A.

b) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels la distance M_1M_2 est fixe égale à $2\sqrt{2}$.

c) Caractériser les applications : $f : z \mapsto 1-iz$ et $g : z \mapsto z-i$.

3° On suppose que $m=e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

a) Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2.

b) Déterminer les lieux géométriques de M_1 et M_2.

EXERCICE 4 (6 POINTS)

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère le polynôme : $p(z)=z^3-(4+5i)z^2+(-8+18i)z+18-4i$.

1° a) Calculer $p(1+i)$.

b) Trouver les complexes a, b tels que $p(z)=(z-1-i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre l'équation : $p(z)=0$.

2° On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $4+i, 1+i, -1+3i$ et $2+3i$.

a) Placer ces points sur une figure et donner la nature du quadrilatère $ABCD$

b) Donner l'écriture complexe de la similitude directe S_1 de centre A qui transforme D en B.

c) Préciser le rapport et un angle de S_1.

d) Donner l'écriture complexe de S_1^{-1} et préciser ses éléments caractéristiques.

3° a) Donner l'écriture complexe de la similitude directe S_2 de centre C qui transforme B en D.

b) Préciser le rapport et un angle de S_2.

4° Soit M un point du plan. On pose $M_1=S_1(M)$ et $M_2=S_2(M)$.

a) Donner l'expression complexe de $S_2 \circ S_1$ et la caractériser.

b) Donner l'expression complexe de l'application qui transforme M_1 en M_2 et la caractériser.

5° On définit la suite de points (M_n) par : $M_0=D$, $M_{n+1}=S_1(M_n)$ et on note z_n l'affixe de M_n.

a) Déterminer les points M_1, M_2 et M_3.

b) Montrer que les points A, D et M_{2024} sont alignés.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 4+i+2\left(\frac{3}{4}(1+i)\right)^n(-1+i)$.

Fin.