aamimaths@gmail.com

Formation en Mathématiques Olympiques
3ème session
Nouakchott, du 13 au 17 décembre 2024

Jour 1- Types de raisonnement et théorie des nombres

Exercice 1

Montrer que $9\,|\,(8^{2n} - 3\cdot 7^n + 2)$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$.

(Résoudre par 2 méthodes)

Exercice 2

Montrer que $5\,|\,(n^5 - n)$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$.

(Résoudre par 3 méthodes)

Exercice 3

Calculer la somme $A = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

(Calculer par 5 méthodes)

Exercice 4

Soit n un entier supérieur à 1. Montrer que n ne peut pas diviser $2^n - 1$.

Exercice 5

Soit m et n deux entiers naturels tels que $\text{pgcd}(m,n) + \text{ppcm}(m,n) = m + n$.

Montrer l'un des nombres m et n divise l'autre.

Exercice 6

On désigne par H_n le n-ième nombre harmonique : $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geq \frac{2n}{n+1}$.

Exercice 7

Pour tout réel x on désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor$, (identité de Ramanujan) .

Si x est un réel, la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$; est le plus grand entier n qui est inférieur ou égal à x. C'est le seul entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Exercice 8

Montrer que pour tout réel x et $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$, (identité de Hermite).

Exercice 9 (IMO 1968)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \cdots$

Exercice 10 (IMO 2024)

Déterminer tous les réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$ soit un multiple de n.

Note : La partie entière de x est le plus grand entier n qui est inférieur ou égal à x;
$\lfloor -\pi \rfloor = -4$ et $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.