AMIMATHS جمعية أصدقاء الرياضيات
aamimaths@gmail.com

Formation en Mathématiques Olympiques

3ème session

Nouakchott, du 13 au 17 décembre 2024

Jour 2- Théorie des nombres

Exercice 1

Trouver tous les entiers naturels d tels que d divise à la fois n^2+1 et $(n+1)^2+1$ pour tout entier n.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $T_n = 2^{2^n}+1$. Montrer que si $m \neq n$, alors T_m et T_n sont premiers entre eux.

Exercice 3

On considère une suite numérique (a_n) vérifiant pour tous entiers naturels m et n, $(m \geq n)$:

$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$ avec $a_1 = 1$. Trouver l'expression du terme général de (a_n).

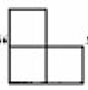
Exercice 4

Montrer qu'il n'existe pas de nombres rationnels x, y, z vérifiant $x^2+y^2+z^2+3(x+y+z)+5=0$

Exercice 5

On considère n points deux à deux distincts choisis arbitrairement dans plan. Montrer qu'il existe un cercle qui passe par deux de ces points tel que les autres (n-2) points sont à l'extérieur de lui.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver qu'après avoir supprimé un carré d'une grille $2^n \times 2^n$, la partie restante peut être carrelée avec des tuiles "" en forme de L, sans espaces ni chevauchements.

Exercice 7 (IMO shortlist 1984)

Supposons que $a_1, a_2, ..., a_n$ soient des entiers deux à deux différents tels que l'équation $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{2n})-(-1)^n(n!)^2=0$ admet une solution entière r.

Montrer que $r = \frac{a_1+a_2+...+a_{2n}}{2n}$.