# Formation en Mathématiques Olympiques
## 3ème session
Nouakchott, du 13 au 17 décembre 2024

## Jour 3- Géométrie

**Exercice 1**
**Soit $ABC$ un triangle équilatéral et $P$ un point à l'intérieur de $ABC$.**
**1° On projette $P$ orthogonalement sur les côtés du triangle. Montrer que les sommes des aires des secteurs non contigus sont égales.**
**2° On suppose que $PA = 5$, $PB = 4$ et $PC = 3$. Calculer alors la longueur du côté de ce triangle.**

**Exercice 2 ( Shortlist IMO 2012)**
**Soit $ABC$ un triangle d'orthocentre $H$. Le cercle de diamètre $[AC]$ et le cercle circonscrit au triangle $AHB$ se recoupent en $K$. Montrer que la droite $(CK)$ passe par le milieu de $[HB]$.**

**Exercice 3 (IMO 2018)**
**Soit ABC un triangle acutangle. La perpendiculaire à (AC) passant par B coupe le cercle de diamètre [AC] en P et Q, et la droite perpendiculaire à (AB) passant par C coupe le cercle de diamètre [AB] en R et S. Montrons que P, Q, R, S sont cocycliques.**

**Exercice 4 (IMO 1985)**

**Un cercle de centre O passe par les sommets A et C d'un triangle ABC et recoupe les segments [AB] et [BC] respectivement en K et N ($K \neq N$). On suppose que les cercles circonscrits aux triangles ABC et KBN se recoupent en un point M différent de B. Montrer que les droites $(OM)$ et $(BM)$ sont perpendiculaires.**

**Exercice 5**
**Soient ABC un triangle et D, E deux points appartenant respectivement à [AB] et [AC] tels que (DE) et (BC) soient parallèles. Soit P un point à l'intérieur du triangle ADE. Soient F et G les points d'intersection de (DE) avec respectivement les droites (BP) et (CP). Soit Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles PDG et PFE. Prouver que les points A, P, Q sont alignés.**

**Exercice 6** (Olympiade de Saint-Pétersbourg 1996).
**Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. On note E le second point d'intersection du cercle circonscrit du triangle de BDC avec (AB) et F le second point d'intersection du cercle circonscrit du triangle ABD avec (BC). Montrons que $AE = CF$.**

**Exercice 7 (Short Australie)**

**Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre $H$. Soit $G$ le point tel que le quadrilatère ABGH soit un parallélogramme. Soit $I$ le point de $(GH)$ tel que $(AC)$ passe par le milieu $[HI]$. On suppose que $(AC)$ recoupe le cercle circonscrit au triangle $GCI$ en $J$. Montrer que $IJ = AH$.**

**Exercice 8 (IMO 2021)**

**Soient ABC un triangle non rectangle tel que AB soit son côté le plus court et H son orthocentre. Soit $\Gamma$ le cercle de centre B et passant par A. Soit D le point où (CA) recoupe $\Gamma$. Soit E le point où $\Gamma$ recoupe le cercle $\Gamma'$ circonscrit au triangle BCD. Soit F l'intersection des droites (DE) et (BH).**

**a) Montrer que E est le symétrique de A par rapport à (BC).**

**b) En déduire que H appartient à $\Gamma'$.**

**c) Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle DFH.**

**Exercice 9**

**Soit ABC un triangle acutangle non isocèle en $C$. Soient $D, F, G$ les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$. Un cercle $\Gamma$ passant par $C$ et tangent à $(AB)$ en $D$ rencontre les segments $[AF]$ et $[BG]$ respectivement en $H$ et $I$. Les points $H', I'$ sont les symétriques de $H$ et $I$ par rapport à $F$ et $G$ respectivement. Les droites $(DF)$ et $(DG)$ recoupent respectivement $\Gamma$ en $R, S$. Montrer que les points $R, S, H', I'$ sont alignés.**

**Exercice 10 (IMO 2018 SL GRECE)**

**Soit $ABC$ un triangle acutangle et $\Gamma$ son cercle circonscrit. Soit $D$ et $E$ deux points des segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement tels que $AD = AE$. Les médiatrices des segments $[BD]$ et $[CE]$ coupent respectivement les petits arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$ respectivement en $F$ et $G$. Montrer que $(DE) \parallel (FG)$.**