aamimaths@gmail.com

Formation en Mathématiques Olympiques
$3^{ème}$ session
Nouakchott, du 13 au 17 décembre 2024

Jour 4- Combinatoire

Problème 1 : Une infection se propage sur les cases d'une grille $n \times n$ de la manière suivante :
Chaque seconde, toute case adjacente à au moins deux cases infectées devient elle-même infectée.
(Deux cases sont dites adjacentes si elles partagent un coté commun.) Prouver que la grille ne peut pas être infectée entièrement s'il y a initialement au plus $n-1$ cases infectées. Est-ce possible en commençant avec exactement n cases infectées ?

Problème 2 : Dans la séquence **1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 3 ; 5 ; …….,** chaque terme commençant par le septième est égal au dernier chiffre de la somme des six termes précédents. Démontrer que cette séquence ne contient pas six termes consécutifs égaux à **0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ;** respectivement.

Problème 3 : Commençons par une suite finie d'entiers positifs, disons $a_1; a_2; \dots; a_n$: Chaque fois qu'il est possible de choisir deux indices distincts j et k tels que $a_j \nmid a_k$ et $a_k \nmid a_j$; nous remplaçons a_j et a_k par les nombres $pgcd(a_j;a_k)$ et $ppcm(a_j;a_k)$. Démontrer que si ce processus est répété, il doit éventuellement s'arrêter.

Problème 4 : Plusieurs pierres sont placées sur une bande infinie de cases. Tant qu'il y a au moins deux pierres sur une seule case, vous pouvez prendre deux de ces pierres, puis en déplacer une vers la case précédente et une vers la case suivante.
Est-il possible de revenir à la configuration de départ après une séquence infinie de tels déplacements ?

Problème 5 : On considère n points dans le plan de telle sorte que chaque trois points d'entre eux forment un triangle d'aire inférieure à 1. Montrez que tous les n points se trouvent dans un triangle d'aire inférieure à 4.

Problème 6 : Soit n un nombre naturel. Les nombres $1; 2; \dots; 4n$ sont écrits sur un tableau. On en choisit alors de manière répétée deux nombres arbitraires a et b, on les efface et on écrit à leur place $|a - b|$ sur le tableau. Montrer que le dernier nombre restant est toujours pair.

Problème 7 : Etant donné n dans le plan où chaque triplet d'entre eux n'est pas aligné. Montrer qu'il existe un polygone dont les sommets sont tous les n points.

Problème 8(ISL 2014) : Le nombre 1 est écrit sur chacune des 2^n feuilles de papier. Chaque minute, nous sommes autorisés à choisir deux feuilles distinctes, à effacer les deux nombres a et b qui y figurent et à écrire le nombre a+b à la place sur les deux feuilles. Démontrer qu'après $n2^{n-1}$ minutes, la somme des nombres de toutes les feuilles est au moins égale à 4^n .

Problème 9 (IMC 2002): Deux cents étudiants ont participé à un concours de mathématiques. Ils avaient six problèmes à résoudre. On sait que chaque problème a été correctement résolu par au moins 120 participants. Démontrer qu'il doit y avoir deux participants de telle sorte que chaque problème soit résolu par au moins un de ces deux élèves.

Problème 10 (IMO 1998) : Dans une compétition, il y a **a** des concurrents et **b** des juges, où **b** est un nombre entier impair. Chaque juge évalue chaque concurrent comme « réussi » ou « échoué ». Supposons que **k** soit un nombre tel que, pour deux juges quelconques, leurs notes coïncident pour au plus **k** candidats. Prouver que $\frac{k}{a} \geq \frac{(b-1)}{2b}$.