AMIMATHS جمعية أصدقاء الرياضيات
aamimaths@gmail.com

Formation en Mathématiques Olympiques

3ème session

Nouakchott, du 13 au 17 décembre 2024

Jour 5 – Inégalités AM – GM et Cauchy Schwartz

Exercice 1

Quelle est la valeur minimale de l'expression $\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt[3]{\frac{z}{x}}$ où x, y et z sont des réels strictement positifs.

Exercice 2

Montrer que pour tout réel positif a on a : $a^{11}-3a^5+a^4+1\geq 0$ et que l'inégalité est stricte pour $a\neq 1$

Exercice 3

Montrer que $\forall a\geq 0$ et pour tout entier $n\geq 1$, on a : $\frac{a^n}{1+a+a^2+...+a^{2n}}\leq\frac{1}{2n+1}$

Exercice 4

Montrer que si $0<b<a$ alors $a+\frac{1}{(a-b)b}\geq 3$

Exercice 5

Montrer que tout réel $a>0$ vérifie l'inégalité $\frac{a^4+9}{10a}>\frac{4}{5}$

Exercice 6

Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $abc=1$.

Trouver la valeur minimale de l'expression $(a+1)(b+2)(c+4)$

Exercice 7

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $a+b+c\leq\frac{3}{2}$.

Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Exercice 8

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $a^2+b^2+c^2=1$.

Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression $a+b+c+\dfrac{1}{abc}$

Exercice 9

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc(a+b+c)=3$.

Démontrer que $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8$.

Exercice 10 (Romanian MO 2006)

Trouver la valeur maximale de l'expression $(x^3+1)(y^3+1)$ pour tous réels x et y vérifiant la condition $x+y=1$.

Exercice 11 (Iranian MO 2005)

Soit a, b et c trois réels non nuls vérifient la condition $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}=2$.

Montrer que $ab+bc+ca\leq\dfrac{3}{2}$

Exercice 12 (Chinese Girls MO 2008)

Soient a, b et c trois réels positifs tels que $a+b+c=1$. Montrer que $\sqrt{a+\dfrac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3}$

Exercice 13 (P2 IMO 1961)

Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle d'aire S. Montrer que $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\,S$

Exercice 14 (Indian MO 2007)

Si x, y et z sont des nombres réels positifs, montrer alors que l'inégalité suivante est vraie
$$(x+y+z)^2(yz+zx+xy)^2\leq 3(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)$$

Exercice 15 (IMO 2015 SL SERBIE)

On considère une suite de nombres réels a_1, a_2, ... vérifiant la condition $a_{k+1}\geq\dfrac{ka_k}{a_k^2+(k-1)}$ (1)

pour tout entier k strictement positif. Montrer que $a_1+a_2+...+a_n\geq n$ pour tout $n\geq 2$.