

Olympiades Nationales de Mathématiques 2025
1^{er} tour Niveau 4AS 26 janvier 2025
Durée 3 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée*

Exercice 1 (25 points)

Dans un groupe de 6 hommes. Si on calcule les sommes de leurs âges cinq à cinq on obtient les résultats suivants : 182, 174, 184, 175, 188 et 172.
Déterminer l'âge de l'homme le plus âgé de ce groupe.

Exercice 2 (25 points)

1) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $n(n+3)+2=(n+a)(n+b)$ et $a < b$.

2) Déduire la valeur du nombre $z = \frac{(4 \times 7 + 2)(6 \times 9 + 2)(8 \times 11 + 2) \dots (100 \times 103 + 2)}{(5 \times 8 + 2)(7 \times 10 + 2)(9 \times 12 + 2) \dots (99 \times 102 + 2)}$

3) Déterminer la valeur de l'entier naturel n tel que :

$$\frac{(1 \times 4 + 2)(3 \times 6 + 2)(5 \times 8 + 2) \dots ((2n+1) \times (2n+4) + 2)}{(2 \times 5 + 2)(4 \times 7 + 2)(6 \times 9 + 2) \dots ((2n+2) \times (2n+5) + 2)} = \frac{1}{2025}$$

Exercice 3 (25 points)

Soit x , y et z des réels strictement positifs

1) Montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$

2) Montrer que $\frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} \geq \frac{x + y + z}{2}$

Exercice 4 (25 points)

PQRS est un carré et I est le milieu de [QR].

Les droites (PI) et (SQ) se coupent en J.

1) Justifier que Aire(PQR) = 2 × Aire(PQI) et Aire(PQJ) = Aire(QRJ)

2) Sachant que l'aire du triangle PQJ est 10 cm²,

a) Calculer l'aire du quadrilatère RSJI.

b) Calculer l'aire du carré PQRS.

Fin.