

Olympiades Nationales de Mathématiques 2025
2^e tour Niveau 4AS 23 février 2025
Durée 4 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée*

Exercice 1 (25 points)

Une boîte contient des boules de trois couleurs : rouges, blanches et bleues.
Le nombre de boules bleues est supérieur ou égal à la moitié du nombre de boules blanches et inférieur au tiers du nombre de boules rouges. Le nombre de boules blanches et de bleues est supérieur ou égal à 55. Trois enfants se partagent équitablement les boules rouges.
Quelle est la quantité minimale de boules rouges que chaque enfant peut recevoir ?

Exercice 2 (25 points)

Soit a et b deux nombres tels que : $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b} \cdot \sqrt{b^2+a} = 0$

Soit $x = a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}$.

- 1) Montrer que $x^2 = 1$.
- 2) Préciser la valeur de x .

Exercice 3 (25 points)

Déterminer toutes les valeurs possibles des entiers naturels non nuls a , b et c tels que $a^2 + 2b^2c^2 = 121$.

Exercice 4 (25 points)

Soit ABC un triangle non isocèle et d'angles aigus. B_1 et C_1 sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$. Un point D se trouve sur la droite (BC) avec C entre B et D .

Le point F est tel que $\widehat{ACF} = 90^\circ$ et $\widehat{DCF} = \widehat{FCA}$.

Le point G est tel que $\widehat{AGB} = 90^\circ$ et $\widehat{CBG} = \widehat{GBA}$.

Démontrer que les points B_1 , C_1 , F et G sont alignés.

Fin.