

**Olympiades Nationales de Mathématiques 2025**  
1<sup>er</sup> tour Niveau 7C 26 janvier 2025  
Durée 3 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.  
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.  
Calculatrice non autorisée*

**Exercice 1 (25 points)**

Lors de la cérémonie de clôture d'un camp d'entraînement de l'équipe Math-Olympique, le coordinateur a déclaré :

*« Dans notre équipe olympique, qui compte 35 élèves, quatre groupes de travail sont actifs, chacun se consacrant à l'un des quatre thèmes des olympiades mathématiques : algèbre, combinatoire, géométrie et théorie des nombres. Chaque groupe se réunit une fois par semaine selon le calendrier suivant : le lundi pour le premier groupe, qui compte 20 élèves, le mardi pour le deuxième avec 14 élèves, le mercredi pour le troisième avec 18 élèves et le jeudi pour le quatrième avec 16 élèves. Aucun élève n'est membre de plus de deux groupes, et aucun groupe ne partage plus de cinq élèves avec un autre groupe. »*

Le coordinateur s'est-il trompé ?

**Exercice 2 (25 points)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  chacune des deux équations suivantes :

1.  $(x+y)^2 = (x+1)(y-1)$

2.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c-2} + \sqrt{u} + \sqrt{v} = a + b + c + u + v$

**Exercice 3 (25 points)**

1. Déterminer tous les entiers relatifs  $x$  et  $y$  vérifiant l'équation  $3x^3 + xy - 5 = 0$ .

2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres rationnels strictement positifs  $x, y$  vérifiant cette équation.

**Exercice 4 (25 points)**

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit I le centre de son cercle inscrit.

Une droite qui passe par I coupe les côtés [AB] et [AC] respectivement en P et Q.

Déterminer la valeur minimale de l'expression :  $AP \times AQ$ .

Fin.