Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

أصدقاء الرياضيات
AMIMATHS
موريتانيا

Olympiades Nationales de Mathématiques

2017 à 2024

7C

Tome 1

Horma Hamoud - Mahfoudh Mohamed Ammou

Dah Mohamed Boubacar - Isselmou Farajou

Olympiades Nationales de

Mathématiques

2017 à 2024

$7^{ème}$ C

Tome 1

Horma Hamoud Mahfoudh Mohamed Ammou

Dah Mohamed Boubacar Iselmou Farajou

Si vous décelez une erreur, nous vous remercions par avance de nous en faire part :

e-mail : aamimaths@gmail.com

L'équipe Rallyes et Olympiades – AMIMATHS

Sommaire

مقدمة

يسر جمعية أصدقاء الرياضيات أن تضع بين يدي مجتمع المهتمين بالرياضيات في موريتانيا هذا الكتاب ضمن السلسلة الأولى من إصداراتها في مجال مسابقات رالي وأولمبياد الرياضيات الوطني.

الكتاب عبارة عن جمع مواضيع مادة الرياضيات في الأولمبياد الوطني للرياضيات لمستوى السنة السابعة رياضيات من سنة 2017 إلى سنة 2024، مع حلولها التفصيلية بمنهجية تربوية علمية تساهم في تنمية مواهب التلاميذ وتساعدهم في التحضير لهذا النوع من المسابقات وطنيا وإقليميا ودوليا. كما يضع تحت تصرف الأساتذة بنكا من التمارين غير التقليدية، مما يساعد في اكتشاف التلاميذ الموهوبين وتحسين عملية التعليم والتدريب.

تم إصدار هذا الكتاب في ثلاثة أجزاء، يعالج كل جزء منها مواضيع أحد الأدوار الثلاثة للأولمبياد الوطني للرياضيات وذلك لمراعاة التدرج في مستوى صعوبة المسائل.

ويأتي إنتاج ونشر هذا الكتاب ضمن أنشطة جمعية أصدقاء الرياضيات - بالتعاون مع وزارة التهذيب الوطني وإصلاح النظام التعليمي - الرامية إلى الرفع من مكتسبات التلاميذ في مادة الرياضيات، وتحسين جودة التعليم ووفرته وصولا إلى الرفع من نسب النجاح في الامتحانات الوطنية وكذا في المسابقات الإقليمية والدولية؛

كما يأتي ذلك في الوقت الذي يلاحظ فيه عزوف مستمر عن مادة الرياضيات أدى إلى تدهور في أعداد المنتسبين إلى شعبة الرياضيات، الشيء

الـذي سـينتج عنـه حتمـا - حاضـرا ومسـتقبلا - نقـص حـاد في المهندسـين والكـوادر العلميـة المؤهلـة وفي الأسـاتذة الأكفـاء القـادرين علـى تـدريس مـواد الرياضـيات والعلـوم الفيزيائيـة لأجيالنـا الصـاعدة، ممـا يـؤخر عجلـة التنميـة والتقـدم إذ لا يمكـن لأي بلـد النهـوض بـدون الرياضـيات لكونهـا مفتاحـا للعلـوم الأخرى ووسيلة لاكتسابها وتملكها.

وفي هـذا السـياق فـإن جمعيـة أصـدقاء الرياضـيات تشـكر جـزيلا اللجنـة الوطنيـة للرياضـيات والعلـوم (برنـامج مواهـب) علـى التعـاون المثمـر والمسـاهمة في توسـيع دائـرة الاهتمـام بمـادة الرياضـيات وجعلهـا مـادة جاذبـة ومشـوقة، كمـا تـثمن عاليـا جهـود كافـة مفتشـي وأسـاتذة الرياضـيات الـذين سـاهموا مـن قريـب أو بعيـد في إنجـاز هـذا العمـل، وتعـول علـى مـا لـديهم مـن ملاحظـات واقتراحـات قـد تسـاعد في تنقـيح وتحسـين جـودة هـذا الكتـاب التجريبي الذي يتم إصداره في بلادنا بهذا الشكل والحجم لأول مرة.

والله ولي التوفيق.

PREFACE

Dans le cadre de la première série de ses publications en matière de compétitions du Rallye et de l'Olympiade Nationale de Mathématiques, l'Association des Amis des Mathématiques (AMIMATHS) est heureuse de mettre cet ouvrage entre les mains de la communauté mathématique de Mauritanie.

Regroupant des sujets de mathématiques des olympiades de 7^{e} année de 2017 à 2024, cet ouvrage propose des solutions détaillées et utilise des méthodologies scientifiques contribuant au développement des talents des élèves tout en les préparant à ce type de compétitions tant au niveau national qu'au niveau régional et international. En outre, ce manuel met à la disposition des enseignants une banque d'exercices non conventionnels leur permettant d'identifier des apprenants doués et contribuant ainsi à améliorer le processus de l'enseignement/apprentissage.

Cet ouvrage est publié en trois tomes, chacun traitant les sujets de l'une des trois phases de l'Olympiade nationale de mathématiques, afin de garantir un niveau de difficulté graduel des problèmes.

La production et la publication de ce livre font partie des activités d'AMIMATHS en coopération avec le Ministère de l'Éducation Nationale et de la Réforme du Système Éducatif visant à rehausser le niveau des acquis des élèves en mathématiques et à améliorer la qualité et l'offre de l'enseignement afin d'augmenter le taux de réussite aux examens nationaux ainsi qu'aux concours régionaux et internationaux.

Cela survient également à un moment où notre pays connait une réticence envers l'enseignement/ apprentissage des mathématiques, réticence qui a conduit à une diminution grave du nombre d'élèves inscrits en série mathématiques. Cette situation déplorable entraînera, sans doute, dans le présent et le futur, un manque criant d'ingénieurs, de personnel scientifique qualifié et de professeurs compétents capables d'enseigner les mathématiques et les sciences physiques à nos prochaines générations. Ce qui retarde la roue du développement et du progrès de notre pays. En effet, aucun pays ne peut progresser sans les mathématiques qui sont la clé des autres sciences et un moyen de leur acquisition.

Dans ce contexte, l'Association AMIMATHS remercie vivement la commission Nationale pour les Mathématiques et les Sciences (Programme Mawaheb) pour sa coopération fructueuse et sa contribution à l'élargissement du cercle d'intérêt pour les mathématiques. Cet intérêt en a fait une matière attractive et passionnante. L'Association remercie également tous les inspecteurs et professeurs de mathématiques qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail. Elle compte également sur les commentaires et suggestions pour contribuer à améliorer la qualité de cet ouvrage expérimental, qui est édité, dans cette ampleur et ce format, pour la première fois dans notre pays.

ENONCES DES SUJETS

du premier tour des olympiades nationales

de Mathématiques de 2017 à 2024

Niveau $7^{ème}$ Mathématiques

Sujet 1 1er tour Session 2024

Exercice 1 (20 points)

Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2} \\ 3\times 2^n - 3 & 4-3\times 2^n \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (20 points)

Résoudre le système $\begin{cases} x^2 = y+z \\ y^2 = z+x \\ z^2 = x+y \end{cases}$

Exercice 3 (20 points)

Dans le triangle à angle aigu ABC, le point F est le pied de la hauteur issue de A, et P un point du segment $[AF]$. Les parallèles à (AC) et (AB) passant par P rencontrent respectivement [BC] en D et E. On considère les points X et Y appartenant respectivement aux cercles circonscrits aux triangles ABD et ACE tels que $DA = DX$ et $EA = EY$.

Montrer que les points B, C, X et Y sont cocycliques.

Exercice 4 (20 points)

Soit a, b et c trois nombres réels strictement positifs.

1° On suppose dans cette question que $a+b+c=1$. Montrer que

$$9 \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq 3+\frac{1}{4abc}.$$

2° On suppose dans cette question que $ab^2c^3 = 1$. Déterminer la valeur minimale de $a+b+c$.

Exercice 5 (20 points)

Soit $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$.

1° Calculer $f(x)+f(1-x)$.

2° Calculer la somme

$$S=\sum_{k=1}^{2023} f\left(\frac{k}{2024}\right)=f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{2023}{2024}\right).$$

Fin.

Sujet 2 1^{er} tour Session 2023

Exercice 1 (25 points)

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & -1\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

1.a) Calculer $A-J$ et J^2.

b) Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 3$, on a : $J^n=0_3$.

2.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :

$$A^n=(-1)^n\left(I_3-nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2\right)$$

b) En déduire la matrice A^n en fonction de n pour tout entier $n\geqslant 1$.

Exercice 2 (25 points)

Trouver tous les entiers n strictement positifs pour lesquels 2^n divise 5^n-1

Exercice 3 (25 points)

Montrer que l'équation suivante (E) admet deux solutions réelles distinctes :

(E) $|x|+|x+1|+|x+2|+...+|x+2022|=x^2+2022x-2023$.

Exercice 4 (25 points)

Soit Γ un cercle de centre O et soit A un point à l'extérieur de Γ.

Les tangentes à Γ issues de A rencontrent le cercle en B et C.

Soit D le point d'intersection de la droite (AO) avec Γ tel que $O \in [AD]$.

On considère les points :

- **E le point d'intersection de (AD) et (BC).**
- **X le projeté orthogonal de B sur (CD),**
- **Y le milieu du segment $[BX]$;**
- **Z le deuxième point d'intersection de la droite (DY) avec Γ.**

1) Faire une figure

2) Démontrer que les points B ,E,Y et Z sont cocycliques.

3) Démontrer que les points A ,E,C et Z sont cocycliques.

Olympiades Nationales de Mathématiques

Sujet 3 1^{er} tour Session 2022

Exercice 1: (25 points)

Dans un désert il y a des serpents, des souris et des scorpions.

Un monde sans pitié.

Chaque matin, chaque serpent mange une souris.

Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent (piqûre mortelle).

Chaque soir, chaque souris mange un scorpion.

Le matin du cinquième jour il ne reste plus qu'un animal : une souris.

Soient x_n, y_n et z_n respectivement le nombre de souris, de serpents et de scorpions au début de la matinée du $n^{ième}$ jour. Le nombre n prend les valeurs 1, 2, …5.

1) Ecrire x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.

2) On considère les matrices : $M\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 5 & -8 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} 60 & 28 & 41 \\ 41 & 19 & 28 \\ 28 & 13 & 19 \end{pmatrix}$

. Calculer le produit MN.

3) Utiliser un calcul matriciel pour déterminer combien y avait-il d'animaux de chaque sorte au début de la matinée du premier jour.

Exercice 2: (25 points)

Dans le plan orienté on considère les points, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ tels que pour tout entier $n \geq 4$, $A_n = A_{n-3}$ et la suite des points $M_0, M_1, M_2, ..., M_n$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} soit l'image de M_n par la rotation de centre A_{n+1} et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note a_n l'affixe du point A_n et z_n celle de M_n.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n et a_{n+1}.

2. Justifier que $z_{3n+3} = z_{3n} + (1-j)\left(a_3 + ja_2 + j^2a_1\right)$.

3. Montrer que si $M_{2022} = M_0$ alors le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral.

Exercice 3: (25 points)

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers du nombre $A(n) = n^4 + 1$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. a) Étudier la divisibilité de A(n) par 2 et sa divisibilité par 3.

b) Soit d un diviseur de A(n), montrer que d et n sont premiers entre eux et que $n^8 \equiv 1 [d]$.

2. Soit d un diviseur de A(n). On note p le plus petit entier naturel non nul tel que $n^p \equiv 1 [d]$.

a) Montrer que si $n^k \equiv 1 [d]$ alors p divise k puis en déduire que p divise 8.

b) Montrer que si, de plus, d est premier, alors p divise d −1.

3. Déterminer les diviseurs premiers de A(12).

Exercice 4: (25 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations

$$\begin{cases} x = 9y^3 - 54y^2 + 108y - 70 \\ y = 9x^3 - 54x^2 + 108x - 70 \end{cases}.$$

.

Olympiades Nationales de Mathématiques

Sujet 4 $\quad$ 1er tour $\quad$ Session 2021

Exercice 1: (25 points)

On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&5&1\\3&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&-4&1\\2&4&2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

1) Calculer AB, AC et AD.

2) Trouver toutes les matrices carrées M d'ordre 3 telles que AM=0 (où 0 désigne la matrice nulle).

Exercice 2: (25 points)

1) Résoudre l'équation $Z^2-104Z+4913=0 \quad (E)$.

2) Soit z_1 et z_2 deux complexes tels que $z_1z_2=17$ et soit $x=z_1+z_2$

Montrer que $x^3=51x+104$ si et seulement si z_1^3 et z_2^3 sont les solutions de l'équation (E).

3) On appelle entier de Gauss tout nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers relatifs. C'est-à-dire : $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

Montrer que les solutions de (E) sont des cubes d'entiers de Gauss.

4) En déduire que l'équation $x^3 = 51x + 104$ a une solution entière que l'on déterminera.

<u>Exercice 3: (25 points)</u>

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et on note D, E et F les pieds de ses hauteurs issues respectivement de A, B et C

Les cercles inscrits dans les triangles BDF et CDE sont notés Γ_B et Γ_C. Soit I et J leurs centres respectifs.

La droite (DF) est tangente à Γ_B au point M.

La droite (DE) est tangente à Γ_C au point N.

La droite (MN) recoupe les cercles Γ_B et Γ_C en P et Q respectivement ($P \neq M$ et $Q \neq N$).

1) Faire une figure.

2) Montrer que $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DI}) = (\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DN}) \quad [\pi]$.

3) Montrer que $PM = QN$.

Exercice 4: (25 points)

Soit n un entier naturel strictement positif. x et y deux réels positifs tels que $x^n + y^n = 1$.

1) Montrer que pour tout réel $t \in]0,1[$: $\dfrac{1+t^2}{1+t^4} < \dfrac{1}{t}$.

2) Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$.

Olympiades Nationales de Mathématiques

Sujet 5 1er tour Session 2020

Exercice 1

On donne la matrice: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A tout réel x on associe la matrice $M(x) = I_3 + xA + \frac{1}{2}x^2A^2$

1) Calculer A^2 **et** A^3 **et en déduire, pour tout entier** $n > 3$**, la valeur de** A^n**.**

2) Montrer que $M(x)M(y) = M(x+y)$**.**

3) Soit n un entier naturel. Ecrire les matrices $M(x)$ **et** $(M(x))^n$ **sous forme de tableaux.**

Exercice 2

Soit Γ et Γ' **deux cercles qui se coupent en A et B. Les tangentes en A à** Γ et Γ' **recoupent respectivement** Γ' **et** Γ **en D et C et la droite** (CD) **recoupe le cercle** Γ **en un point M différent de B. On se propose de montrer que la droite** (MB) **passe par le milieu du segment** $[AD]$

1) Soit N le point d'intersection de (BM) avec Γ'. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD}\right)$.

2) Déterminer la nature du quadrilatère $AMDN$ puis conclure.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{C}$, les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.

1) Montrer que $\frac{\left(z_1+z_2\right)^2}{z_1z_2}$ est un réel positif ou nul.

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b (on suppose que les points O, A et B ne sont pas alignés). Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre du système $\left\{\left(A,|b|\right);\left(B,|a|\right)\right\}$.

3.a) A l'aide de la question 1), montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

b) Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$.

c) En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exercice 4

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1) Le triangle ABC est équilatéral

2) j ou j^2 est racine de l'équation $az^2+bz+c=0$

3) $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

4) $\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}=0$

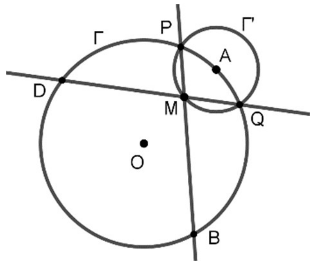
Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\mathrm{ppcm}(x,y)-\mathrm{pgcd}(x,y)=243$.

Olympiades Nationales de Mathématiques

Sujet 6 1^{er} tour Session 2019

Exercice 1: (20 points)



Soit A un point d'un cercle Γ de centre O et de rayon R. Soit Γ' un cercle de centre A qui rencontre Γ en P et Q. M un point de Γ' distinct de P et Q tel que (MP) recoupe Γ en B et (MQ) recoupe Γ en D.

On cherche à démontrer par deux méthodes que : $(BD)\perp(AM)$.

1° <u>Méthode</u> 1 : Puissance d'un point par rapport à un cercle.

a) Soit Δ_M une droite quelconque passant par M qui coupe Γ en E et F. Placer $E' = S_O(E)$ et montrer que $\overrightarrow{ME}\bullet\overrightarrow{MF} = OM^2 - R^2$ (ce nombre est appelé la puissance du point M par rapport à Γ).

b) Que peut-on dire de $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MQ}\bullet\overrightarrow{MD}$?

c) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$

2° <u>Méthode</u> 2 : Angles orientés

a) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=\pi$

b) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$

Exercice 2 : (20 points)

Soit le nombre : $X=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

1° Calculer X^3

2° Montrer que X est un entier naturel que l'on déterminera.

Exercice 3 : (20 points)

1° Soit $A=p^2\left(2p+1\right)^2$ où $p\in\mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division de A par 10.

2° Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+...+n^3$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\dfrac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$.

b) Quel est le chiffre des unités de S_{2018} ?

c) Quel est le chiffre des unités de $\left(\dfrac{S_{2019}}{900}\right)^{2019}$?

Exercice 4 : (20 points)

Soient n un entier naturel non nul et α un réel.

1° Résoudre le système $\begin{cases}u^n+v^n=2\sin\alpha\\ uv=1\end{cases}$, où u et v sont des nombres complexes.

2° Résoudre le système $\begin{cases}(z_1+iz_2)^n+(z_1-iz_2)^n=2\sin\alpha\\ z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}=1\end{cases}$,

où z_1 et z_2 sont des nombres complexes.

Exercice 5: (20 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}$ où a est un réel non nul. On se propose de déterminer les réels x_n et y_n tels que $A^n=x_nA+y_nI_2$, où I_2 est la matrice unité d'ordre 2.

1° Calculer A^2 et A^3.

2° Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=3x_n+y_n$ et $y_{n+1}=-2x_n$.

3° Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $A^n=\left(2^n-1\right)A+\left(2-2^n\right)I_2$.

4° Déterminer la matrice inverse de A^{2019}.

Olympiades Nationales de Mathématiques

Sujet 7 1er tour Session 2018

Exercice 1 : (20 points)

ABCD est un carré direct de coté 1, (Q) est un quart de cercle de centre C et passant par B et D.

M est un point variable du segment [AB] distinct de A et B. Par le point M on trace la tangente à (Q) qui coupe le coté [AD] en N. Le point de contact de la tangente avec (Q) est nommé T.

On pose $AM = x$ et $AN = y$ avec $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$

1. a) Faire une figure et démontrer que : $MN = 2 - x - y$

b) En déduire que $y = 2 + \dfrac{2}{x-2}$

2) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale. Calculer cette distance.

3) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMN est maximale. Calculer cette aire.

Exercice 2 ; (20 points)

Pour tout réel $a \neq 0$, on considère les matrices

$$M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ et } N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall b \in \mathbb{R}^*$ on a : $M_a \times M_b = M_{ab}$, $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$, $M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$ et $N_b \times M_a = N_{ab}$.

2) Que peut-on dire de $(M_a)^n$? $(N_a)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 3 : (20 points)

1) Resoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

2.a) Montrer que, pour tout entier naturel n, le couple $(14n+3, 21n+4)$ est solution de (E) .

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ les deux nombres $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

3.a) Soit $d = pgcd(21n+4, 2n+1)$. Justifier que $d = 1$ ou $d = 13$.

b) Montrer que $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6\,[13]$.

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

a) Montrer que les deux nombres A et B sont divisibles par $n-1$

b) Déterminer, suivant les valeurs de n, le $p\gcd(A,B)$.

Exercice 4 : (20 points)

Soit m un nombre complexe différent de 1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0.$$

1. a) Montrer que le discriminant Δ de (E) s'écrit sous la forme $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

c) Déterminer, sous forme algébrique, m tel que le produit des solutions de (E) soit égal à 1.

2) Ecrire la forme trigonométrique des complexes $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$, pour $m = e^{i\theta}$ $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$.

Exercice 5 : (20 points)

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

1) Calculer les dérivées première, seconde et troisième de f .

2) Détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n de f en fonction de n.

Olympiades Nationales de Mathématiques

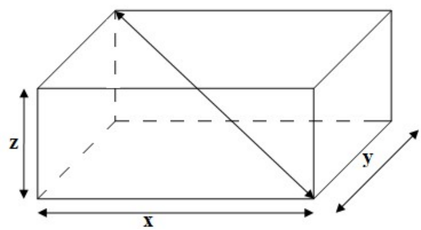
Sujet 8 $\quad$ 1er tour $\quad$ Session 2017

Exercice 1 (4 points)

1) Vérifier que, pour tous réels x , y, z on a :

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

2) La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est 22cm^2 et la somme des longueurs de ses arêtes est 24cm . Déterminer la longueur de ses diagonales intérieures.



Exercice 2 (4 points)

Soients α et β deux réels.

1) Développer, réduire et factoriser l'expression $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2$.

2) Soient x, y et z des entiers naturels. Le triplet (x,y,z) est pythagoricien si $x^2+y^2=z^2$.

Utiliser 1) pour donner trois exemples (non proportionnels) de triplets pythagoriciens.

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère le point $A(-1+i)$ et la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'affixes z_n définie par : $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n + i$.

1) Montrer que le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle isocèle pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que les points M_n restent sur quatre droites fixes. Sur quelle droite se trouve le point M_{2017} ?

3On pose : $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$. Calculer L_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$.

Exercice 4 (4 points)

1) Soit $PQRS$ un trapèze de bases $[PS]$ et $[QR]$ dont les diagonales se coupent en E. Montrer que les triangles PQE et RSE sont de même aire.

2) Soit ABC un triangle acutangle (à angles aigus).

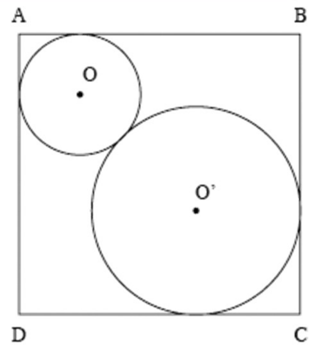
La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe $[BC]$ en L et recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en N . Les projetés orthogonaux de L sur (AB) et sur (AC) sont notés respectivement F et D .

La parallèle à (NC) menée de D coupe (BC) en I .

a) Montrer que (FI) est parallèle à (BN).

b) Montrer que le triangle ABC et le quadrilatère $AFND$ sont de même aire.

Exercice 5 (4 points)



Soit $ABCD$ un carré de coté a.

Un cercle Γ intérieur au carré est tangent à (AB) et (AD). Un second cercle Γ', intérieur au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites (CB) et (CD).

Soit S la somme des aires des cercles Γ et Γ' : qu'elles sont les valeurs maximale et minimale de S ?

CORRIGE DES SUJETS

du premier tour des olympiades nationales

de Mathématiques de 2017 à 2024

Niveau $7^{ème}$ Mathématiques

Corrigé du Sujet 1 1er tour 2024

Exercice 1 (20 points)

Montrer que pour tout entier naturel non nul,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2} \\ 3\times 2^n - 3 & 4-3\times 2^n \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé

Procédons par récurrence.

Initialisation :

Pour $n=1$ on a

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 & 4-8 \\ 6-3 & 4-6 \end{pmatrix} \Rightarrow M^1 = \begin{pmatrix} 2^{1+2}-3 & 4-2^{1+2} \\ 3\times 2^1 - 3 & 4-3\times 2^1 \end{pmatrix}$$

Alors la proposition est vraie pour $n=1$

Hérédité :

si $M^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2} \\ 3\times 2^n - 3 & 4-3\times 2^n \end{pmatrix}$ **alors**

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M\times M^n\\
&=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2}\\ 3\times 2^n-3 & 4-3\times 2^n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}5\times 2^{n+2}-15-12\times 2^n+12 & 20-5\times 2^{n+2}-16+12\times 2^n\\ 3\times 2^{n+2}-9-6\times 2^n+6 & 12-3\times 2^{n+2}-8+6\times 2^n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}2^{n+3}-3 & 4-2^{n+3}\\ 3\times 2^{n+1}-3 & 4-3\times 2^{n+1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc si la proposition est vraie pour n alors elle serait vraie pour $n+1$

Conclusion :

Pour tout entier naturel non nul, $M^n=\begin{pmatrix}2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2}\\ 3\times 2^n-3 & 4-3\times 2^n\end{pmatrix}$

Exercice 2 20 points

Résoudre le système $\begin{cases}x^2=y+z\\ y^2=z+x\\ z^2=x+y\end{cases}$

Corrigé

On a

$(1)\,\&\,(2)\Rightarrow x^2-y^2=y-x\Rightarrow (x-y)(x+y+1)=0\Rightarrow x=y \text{ ou } x+y=-1$

1er cas : $x+y=-1\Rightarrow z^2=-1\Rightarrow z=\pm i$

- Si $z=i$ alors $x^2+y^2=-1+2i$ et on a

$$xy=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(x^2+y^2)\right]=\frac{1}{2}\left[1-(-1+2i)\right]=1-i$$

Alors x et y sont solutions de l'équation $t^2+t+1-i=0$

dont les solutions sont i et $-1-i$

Dans ce cas les solutions sont $(i;-1-i;i)$ et $(-1-i;i;i)$

- Si $z=-i$ alors $x^2+y^2=-1-2i$ et

$$xy=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(x^2+y^2)\right]=\frac{1}{2}\left[1-(-1-2i)\right]=1+i$$

Alors x et y sont solutions de l'équation $t^2+t+1+i=0$

dont les solutions sont $-i$ et $-1+i$

Dans ce cas les solutions sont $(-i;-1+i;-i)$ et $(-1+i;-i;-i)$

2e cas : Si $y=x$ alors le système s'écrit

$$\begin{cases} x^2=x+z \\ z^2=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x^2-x \\ (x^2-x)^2=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x^2-x \\ x^4-2x^3+x^2=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x^2-x \\ x^4-2x^3+x^2-2x=0 \end{cases}$$

- Si $x=0$ alors le système admet une seule solution

$(x,y,z)=(0,0,0)$

-

- Si $x\neq 0$ alors le système s'écrit

$$\begin{cases} z=x^2-x \\ (x-2)(x^2+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x^2-x \\ x=2 \text{ ou } x=\pm i \end{cases}$$

- Pour $x = 2$ on aura $z = 2$
- Pour $x = i$ on aura $z = -1 - i$
- Pour $x = -i$ on aura $z = -1 + i$

Conclusion :

Le système admet huit solutions

$$(i;-1-i;i),(-1-i;i;i),(-i;-1+i;-i),(-1+i;-i;-i),$$
$$(0;0;0),(2;2;2),(i;i;-1-i),(-i;-i;-1+i$$

<u>Exercice 3 (20 points)</u>

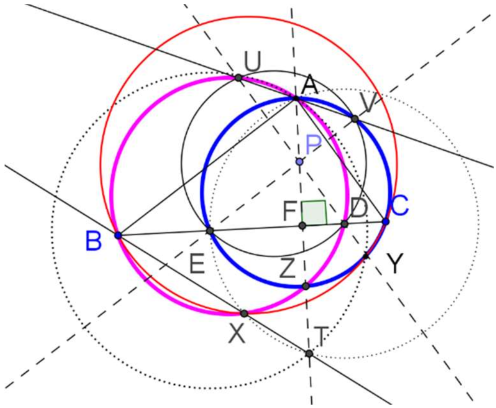
Dans le triangle à angle aigu ABC, le point F est le pied de la hauteur issue de A, et P un point du segment $[AF]$. Les parallèles à (AC) et (AB) passant par P rencontrent respectivement [BC] en D et E. On considère les points X et Y appartenant respectivement aux cercles circonscrits aux triangles ABD et ACE tels que $DA = DX$ et $EA = EY$.

Montrer que les points B, C, X et Y sont cocycliques.

Corrigé

On note U le second point d'intersection de la droite (DP) avec le cercle circonscrit au triangle ABD. V le second point d'intersection de la droite (EP) avec le cercle circonscrit au

triangle AEC et Z le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABD et AEC.



On a $\angle UAV = \angle UAB + \angle BAC + \angle CAV + 180°$ donc les points U, A et V sont alignés.

D'autre part $\angle UVE = \angle AVE = \angle ACE = \angle UDE$ donc les points U, E, D , V sont cocycliques d'où $PD.PU = PE.PV$ (puissance de point P par rapport au cercle passant par U, E, D , V)

D'après Thalès on a $\frac{FD}{FC} = \frac{FP}{FA} = \frac{FE}{FB} \Rightarrow FD.FB = FE.FC$ donc le point F appartient à l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles ABD et AEC qui est (AZ). D'où $Z \in (AP)$.

Notons T le point d'intersection des droites (AZ) et (BX).

Donc T et A sont symétriques par rapport à (BD), d'où

$\angle ACB = \angle BCT$

D'autre part on

$$\begin{aligned} \angle YCB &= \angle YCE && \textbf{alignement} \\ &= \angle YAE && \textbf{cocyclicité AEYC} \\ &= \angle AYE && \textbf{AEY isocèle en E} \\ &= \angle ACE && \textbf{cocyclicité AEYC} \\ &= \angle ACB && \textbf{alignement} \\ &= \angle BCT && \textbf{resultat précédent} \end{aligned}$$

Donc les points C, Y, T sont alignés et comme T appartient à l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles ABD et AEC alors on a $TX.TB = TZ.TA = TY.TC$ donc $TX.TB = TY.TC$ ce qui montre que X, B, Y, C sont cocycliques.

Exercice 4 (20 points)

Soit a, b et c trois nombres réels strictement positifs.

1° On suppose dans cette question que $a+b+c=1$. Montrer que

$$9 \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le 3+\frac{1}{4abc}.$$

2° On suppose dans cette question que $ab^2c^3=1$. Déterminer la valeur minimale de $a+b+c$.

Corrigé

1° Montrer que $9 \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le 3+\frac{1}{4abc}$ **revient à montrer que**

$$9abc \le ab+bc+ca \le 3abc+\frac{1}{4}$$

Comme $a+b+c=1$ **alors** $ab+bc+ca=(ab+bc+ca)(a+b+c)$ **et d'après l'IAG on a**

$ab+bc+ca=(ab+bc+ca)(a+b+c) \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \times 3\sqrt[3]{abc}=9abc$ **d'où la première inégalité** $9abc \le ab+bc+ca$.

D'après la symétrie de rôles on peut supposer que $a \ge b \ge c$

donc $a \ge \frac{a+b+c}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3a \ge 1$ **d'où** $3abc \ge bc$

En plus $b+c=1-a$ **et donc**

$$ab + ac = a(b + c) = a(1 - a) \leq \left(\frac{a + (1 - a)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

D'où $ab + bc + ca = bc + ab + ac \leq \frac{1}{4} + bc \leq \frac{1}{4} + 3abc$

2° On peut écrire $a + b + c$ **sous la forme**

$$a + b + c = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}c \geq 6\sqrt[6]{\frac{ab^2c^3}{2^2 \times 3^3}} = \frac{6}{\sqrt[6]{108}}.$$

Donc $a + b + c \geq \frac{6}{\sqrt[6]{108}}$.

Le cas d'égalité de l'IAG aura lieu si

$a = \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}c \Rightarrow b = 2a$ **et** $c = 3a \Rightarrow a + b + c = 6a$ **or**

$ab^2c^3 = 1 \Rightarrow 108a^6 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[6]{108}} \Rightarrow a + b + c = \frac{6}{\sqrt[6]{108}}$

Donc la plus petite valeur de $a + b + c$ **est** $\frac{6}{\sqrt[6]{108}}$

Exercice 5 (20 points)

Soit $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$.

1° Calculer $f(x)+f(1-x)$.

2° Calculer la somme

$$S=\sum_{k=1}^{2023} f\left(\frac{k}{2024}\right)=f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{2023}{2024}\right).$$

Corrigé

1° $f(x)+f(1-x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{9}{9+3\times 9^x}=\dfrac{9^x+3}{9^x+3}=1$

2° $$S=\left[f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2023}{2024}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2024}\right)+f\left(\frac{2022}{2024}\right)\right]+\cdots+$$
$$\left[f\left(\frac{1011}{2024}\right)+f\left(\frac{1013}{2024}\right)\right]+f\left(\frac{1012}{2024}\right)$$

Alors $S=1011+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1011+\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}+3}=1011+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2023}{2}$

Corrigé du Sujet 2 1^{er} tour 2023

Exercice 1 (25 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

1.a) Calculer $A - J$ et J^2.

b) Démontrer que pour tout entier n avec $n \geqslant 3$, on a : $J^n = 0_3$.

2.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$A^n = (-1)^n \left(I_3 - nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \right)$$

b) En déduire la matrice A^n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Corrigé

1. a) $A - J = -I_3$ et $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) On a $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$ et si $J^n = 0_3$

alors $J^{n+1} = 0_3 \times J = 0_3$

2. a) D'après 1. a) on a $A = J - I_3 = (-1)^1\left(I_3 - J + 0 \times J^2\right)$ donc la

proposition est vraie pour $n = 1$.

Si elle est vraie pour n on aura alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= \left(-I_3 + J\right)(-1)^n\left(I_3 - nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2\right) \\ &= (-1)^{n+1}\left(I_3 - nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2\right) + (-1)^n\left(J - nJ^2 + \frac{n(n-1)}{2}J^3\right) \\ &= (-1)^{n+1}\left(I_3 - nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 - J + nJ^2\right) \\ &= (-1)^{n+1}\left(I_3 - (n+1)J + \frac{n(n+1)}{2}J^2\right) \end{aligned}$$

Alors la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$

b) Donc on a

$$\begin{aligned} &A^n = (-1)^n\left(I_3 - nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2\right) \\ &\Rightarrow A^n = (-1)^n I_3 - (-1)^n nJ + \frac{(-1)^n n(n-1)}{2}J^2 \end{aligned}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (-1)^n n & -2n(-1)^n & -(-1)^n n \\ -(-1)^n n & 4n(-1)^n & 2n(-1)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{(-1)^n n(n-1)}{2} & 0 & 0 \\ (-1)^n n(n-1) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ \dfrac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2} & (2n+1)(-1)^n & n(-1)^{n+1} \\ (-1)^n n(n-2) & 4n(-1)^{n+1} & (-1)^n (1-2n) \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (25 points)

Trouver tous les entiers n strictement positifs pour lesquels

2^n divise $5^n - 1$

Corrigé

On remarque que $2^1 \mid 4 = 5^1 - 1$ et $2^2 = 4 \mid 24 = 5^2 - 1$ alors

$n = 1$ et $n = 2$ sont solutions.

D'autres part on a $5^n - 1 = 4(5^{n-1} + 5^{n-2} + ... + 5^1 + 1)$

Si n est impair $(n \geq 3)$ le terme $5^{n-1} + 5^{n-2} + ... + 5^1 + 1$ est la somme d'un nombre impair de nombres impairs donc il est impair alors

$8=2^3$ **ne divise pas** 5^n-1**. Alors le seul entier impair solution est 1.**

Si n est pair $(n\geq 4)$**, il existe alors p tel que** $n=2p$ $(p\geq 2)$ **et donc**

$5^n-1=5^{2p}-1=(5^p-1)(5^p+1)$

Or 5^p-1 **et** 5^p+1 **sont deux nombres pairs et leur pgcd est 2 (car** $(5^p+1)-(5^p-1)=2$ **). Alors pour que n soit solution il faut que** 2^{2p-1} **divise l'un des termes** 5^p+1 **ou** 5^p-1**.**

Comme $p\geq 2$ **alors 4 divise** 2^{2p-1} **et donc si** 2^{2p-1} **divise** 5^p+1 **alors 4 divisera** 5^p+1 **ce qui est absurde car** $5^p+1\equiv 2[4]$**.**

Donc il faut que 2^{2p-1} **divise** 5^p-1**.**

On a vu avant que c'est impossible pour p impaire supérieur ou égal à 3.

Si $p=2$**, on a** $2^{2p-1}=8|24=5^2-1$ **donc** $n=4$ **est solution**

Si $p=2k$ **avec** $k\geq 2$ **alors** 2^{2p-1} **divise** $5^p-1=(5^k-1)(5^k+1)$ **signifie que** 2^{4k-2} **divise toujours** 5^k-1 **ce qui implique que** $5^k-1\geq 2^{4k-2}$ **ce qui est absurde.**

Conclusion les seules solutions du problème sont $n=1,\ n=2$ **et** $n=4$**.**

Exercice 3 (25 points)

Montrer que l'équation suivante (E) admet deux solutions réelles distinctes :

(E) $|x|+|x+1|+|x+2|+...+|x+2022|=x^2+2022x-2023$ **.**

Corrigé

(E) s'écrit $|x|+|x+1|+|x+2|+...+|x+2022|=(x-1)(x+2023)$

Alors il faut que $(x+1)(x-2023)\geq 0$ **ce qui signifie**

$x\leq -2023$ **ou** $x\geq 1$

1[er] **cas : si** $x\leq -2023$ **alors l'équation s'écrit**

$-x-(x+1)-(x+2)-...-(x+2022)=x^2+2022x-2023$ **ou encore**

$$-\frac{2023(x+x+2022)}{2}=x^2+2022x-2023$$

$$\Leftrightarrow x^2+4045x+2023\times 1010=0$$

Cette équation admet deux solutions dont l'une est à rejeter car supérieure strictement à -2023 **.**

2^e cas si $x \geq 1$ l'équation s'écrit

$$\frac{2023(x+x+2022)}{2} = x^2 + 2022x - 2023$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2023 \times 1012 = 0$$

Cette équation admet deux solutions dont l'une est à rejeter car inferieure strictement à 1.

<u>Exercice 4 (25 points)</u>

Soit Γ un cercle de centre O et soit A un point à l'extérieur de Γ

Les tangentes à Γ issues de A rencontrent le cercle en B et C.

Soit D le point d'intersection de la droite (AO) avec Γ tel que $O \in [AD]$.

On considère les points :

- **E le point d'intersection de (AD) et (BC).**
- **X le projeté orthogonal de B sur (CD),**
- **Y le milieu du segment $[BX]$;**
- **Z le deuxième point d'intersection de la droite (DY) avec Γ.**

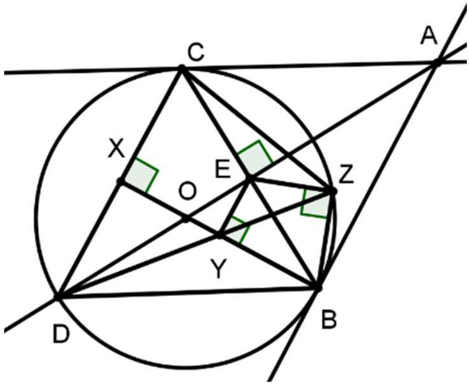
1) Faire une figure

2) Démontrer que les points B ,E,Y et Z sont cocycliques.

3) Démontrer que les points A ,E,C et Z sont cocycliques.

Corrigé

1) la figure



2) La droite (AD) est la médiatrice de [BC] donc E est le milieu de [BC] d'où (EY) est parallèle à (CD). D'où

$\widehat{EYZ} = \widehat{CDZ} = \widehat{CBZ} = \widehat{EBZ}$ alors les points B, E, Y et Z sont cocycliques

3) La droite (AE) est perpendiculaire à (BE) qui est un diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère EYBZ, donc (AE) est tangente à ce cercle.

D'où

$\widehat{ZEA} = \widehat{ZYE}$ **((AE) tangente au cercle EYBZ)**

$= \widehat{ZBE}$ **(cocyclicité des points E, Y, B, Z)**

$= \widehat{ZBC}$ **(alignement des points B, E, C)**

$= \widehat{ZCA}$ **((AC) tangente à Γ en C)**

D'où la cocyclicité des quatre points A, E, C et Z.

Corrigé du Sujet 3 1er tour 2022

Exercice 1

Dans un désert il y a des serpents, des souris et des scorpions. Un monde sans pitié.

Chaque matin, chaque serpent mange une souris.

Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent (piqûre mortelle).

Chaque soir, chaque souris mange un scorpion.

Le matin du cinquième jour il ne reste plus qu'un animal : une souris.

Soient x_n, y_n et z_n respectivement le nombre de souris, de serpents et de scorpions au début de la matinée du n-ième jour. Le nombre n prend les valeurs 1, 2, …5.

1) Ecrire x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n

2) On considère les matrices : $M\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 5 & -8 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ **et** $N\begin{pmatrix} 60 & 28 & 41 \\ 41 & 19 & 28 \\ 28 & 13 & 19 \end{pmatrix}$

. Calculer le produit MN.

3) Utiliser un calcul matriciel pour déterminer combien y avait-il d'animaux de chaque sorte au début de la matinée du premier jour.

Corrigé :

Dans un désert il y a des serpents, des souris et des scorpions. Un monde sans pitié.

Chaque matin, chaque serpent mange une souris.

Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent (piqûre mortelle).

Chaque soir, chaque souris mange un scorpion.

Le matin du cinquième jour il ne reste plus qu'un animal : une souris.

Soient x_n, y_n et z_n respectivement le nombre de souris, de serpents et de scorpions au début de la matinée du n-ième jour. Le nombre n prend les valeurs 1, 2, …5.

1) Ecrire x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = y_n - z_n \\ z_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

2. $MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = id_3$. **M est inversible et** $M^{-1} = N$

3) Utiliser un calcul matriciel pour déterminer combien y avait-il d'animaux de chaque sorte au début de la matinée du premier jour.

3. $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ **où** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **alors** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ **et**

On a $A^4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 5 & -8 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} = M$

Soit $P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. **Alors** $P_{n+1} = AP_n$.

Donc

$$\begin{aligned} & P_2 = AP_1 \\ & \Rightarrow P_3 = AP_2 = A^2P_1 \\ & \Rightarrow P_4 = AP_3 = A^3P_1 \\ & \Rightarrow P_5 = AP_4 = A^4P_1 = MP_1 \end{aligned}$$

Donc $P_5 = MP_1 \Rightarrow P_1 = M^{-1}P_5 = NP_5$. D'où

$$P_1 = \begin{pmatrix} 60 & 28 & 41 \\ 41 & 19 & 28 \\ 28 & 13 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 41 \\ 28 \end{pmatrix} \text{ or } P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ par identification on a}$$

$x_1 = 60;\ y_1 = 41$ **et** $z_1 = 28$. $x_1 = 60;\ y_1 = 41$ **et** $z_1 = 28$

Alors au début de la matinée du premier jour il y avait 60 souris, 41 serpents et 28 scorpions

Exercice 2

Dans le plan orienté on considère les points, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ tels que pour tout entier $n \geq 4$, $A_n = A_{n-3}$ et la suite des points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} soit l'image de M_n par la rotation de centre A_{n+1} et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note a_n l'affixe du point A_n et z_n celle de M_n.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n et a_{n+1}.

2. Justifier que $z_{3n+3} = z_{3n} + (1-j)\left(a_3 + ja_2 + j^2a_1\right)$

3. Montrer que si $M_{2022} = M_0$ alors le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral.

Corrigé

1. $z_{n+1} = jz_n + (1-j)a_{n+1}$

2. On a :

$$
\begin{aligned}
&z_{3n+3} = jz_{3n+2} + (1-j)a_{3n+3}\\
&\Rightarrow z_{3n+3} = j(jz_{3n+1} + (1-j)a_{3n+2}) + (1-j)a_{3n+3}\\
&\Rightarrow z_{3n+3} = j^2 z_{3n+1} + (j-j^2)a_{3n+2} + (1-j)a_{3n+3}\\
&\Rightarrow z_{3n+3} = j^2(jz_{3n} + (1-j)a_{3n+1}) + (j-j^2)a_{3n+2} + (1-j)a_{3n+3}\\
&\Rightarrow z_{3n+3} = z_{3n} + (j^2-j^3)a_{3n+1} + (j-j^2)a_{3n+2} + (1-j)a_{3n+3}\\
&\Rightarrow z_{3n+3} = z_{3n} + (1-j)\left[a_{3n+3} + ja_{3n+2} + j^2a_{3n+1}\right]
\end{aligned}
$$

Or $a_{3n+3} = a_3$, $a_{3n+2} = a_2$ et $a_{3n+1} = a_1$ d'où

$$z_{3n+3} = z_{3n} + (1-j)\left(a_3 + ja_2 + j^2a_1\right)$$

3. Soit $\omega = (1-j)\left(a_3 + ja_2 + j^2a_1\right)$ on a

$$z_{3n} = z_{3(n-1)} + \omega = z_{3(n-2)} + 2\omega = z_{3(n-3)} + 3\omega\ldots.$$

On remarque que $z_{3n} = z_{3(n-p)} + p\omega$ et on montre que $z_{3n} = z_0 + n\omega$

Puisque $2022 = 3\times 674$ alors $z_{2022} = z_0 + 674\omega$

On suppose que $M_{2022} = M_0$ alors $z_{2022} = z_0$ d'où $\omega = 0$ ce qui signifie que $a_3 + ja_2 + j^2a_1 = 0$ or $1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow j^2 = -(1+j)$ donc

$$a_3 + ja_2 - (1+j)a_1 = 0$$
$$\Rightarrow a_3 - a_1 = -j(a_2 - a_1)$$
$$\Rightarrow \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} = -j = -e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Ce qui montre que le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral.

Exercice 3

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers du nombre $A(n) = n^4 + 1$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. a) Étudier la divisibilité de A(n) par 2 et sa divisibilité par 3.

b) Soit d un diviseur de A(n), montrer que d et n sont premiers entre eux et que $n^8 \equiv 1 [d]$

2. Soit d un diviseur de A(n). On note p le plus petit entier naturel non nul tel que $n^p \equiv 1 [d]$.

a) Montrer que si $n^k \equiv 1 [d]$ alors p divise k puis en déduire que p divise 8

b) Montrer que si, de plus, d est premier, alors p divise d −1.

3. Déterminer les diviseurs premiers de A(12).

Corrigé

1. a) la parité de $A(n)$ est contraire à celle de n. Donc $A(n)$ est divisible par 2 ssi n est impaire.

La table de congruence montre que le reste de la division de $A(n)$ par est soit 1 soit 2. Donc $A(n)$ n'est pas divisible par 3. $\left(A(n) \equiv 1[3] \Leftrightarrow n \equiv 0[3]\right)$.

b) Soit d un diviseur de $A(n)$. Tout diviseur commun de d et n divise encore $A(n)$ et n^4 alors il divise $A(n) - n^4 = 1$ donc il est égale à 1 . Alors d et n sont premiers entre eux.

Comme d divise $A(n)$ alors $A(n) \equiv 0[d] \Leftrightarrow n^4 \equiv -1[d] \Leftrightarrow n^8 \equiv 1[d]$.

2. a) Si $n^k \equiv 1\ [d]$ alors k est plus grand que p. Supposons que la division euclidienne de k par p s'écrit $k = pq + r$ avec $0 \leq r < p$ alors $n^k = (n^p)^q \times n^r$ et comme $n^p \equiv 1\ [d]$ alors $(n^p)^q \equiv 1\ [d]$ d'où $n^k \equiv n^r\ [d]$ donc on a $n^r \equiv 1\ [d]$ et comme $r < p$ et p est le plus petit entier naturel non nul tel que $n^p \equiv 1\ [d]$ alors $r = 0$ donc p divise k.

Puisque $n^8 \equiv 1[d]$ alors p divise 8. Donc $p \in \{1;2;4;8\}$.

b) Supposons que d est premier. Comme d et n sont premiers entre eux (question 1. b) alors n n'est pas un multiple de d d'où, d'après le petit théorème de Fermat on a $n^{d-1} \equiv 1[d]$ ce qui montre que p divise $d-1$ (question 2. a).

3. Si d est un diviseur premier de A(12) alors d'après les questions précédentes on a $d-1$ est divisible par 8 donc $d=8n+1$ où n est un entier naturel. En plus si $n \equiv 1[3]$ alors $d \equiv 0[3]$ donc 3 divise d et par conséquence elle divisera A(12) ce qui est impossible (question1.a).

Donc on cherche les diviseurs premiers de A(12) de la forme $d=8n+1$ avec n non congru à 1 modulo 3.

D'autre part $A(12)=12^4+1=20737$ et la liste des nombres premiers vérifiant les conditions précédentes contient $17;41;73;89;97;113;137;193;217;233;....$

Alors les diviseurs premiers de $A(12)$ sont 89 et 233.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations

$$\begin{cases} x = 9y^3 - 54y^2 + 108y - 70 \\ y = 9x^3 - 54x^2 + 108x - 70 \end{cases}.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique

Corrigé :

$$\begin{cases} x = 9y^3 - 54y^2 + 108y - 70 \\ y = 9x^3 - 54x^2 + 108x - 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 9(y^3 - 6y^2 + 12y - 8) \\ y - 2 = 9(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 9(y - 2)^3 \\ y - 2 = 9(x - 2)^3 \end{cases}$$

Posons $X = x - 2$ et $Y = y - 2$ donc on a

$$\begin{cases} X = 9Y^3 \\ Y = 9X^3 \end{cases} \Rightarrow X = 9\left(9X^3\right)^3 \Rightarrow X = 9^4 X^9 = 3^8 X^9$$

Cette équation s'écrit

$$X\left((3X)^8 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow X\left((3X)^4 + 1\right)\left((3X)^4 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow X\left((3X)^4 + 1\right)\left((3X)^2 + 1\right)(3X + 1)(3X - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = \frac{-1}{3} \text{ ou } X = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{5}{3} \text{ ou } x = \frac{7}{3}$$

Comme $Y = 9X^3$ alors :

$$X = 0 \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$X = -\frac{1}{3} \Rightarrow Y = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

Et $X = \frac{1}{3} \Rightarrow Y = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{7}{3}$

Donc les solutions du système sont les couples

$(2;2)$; $\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$ et $\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Corrigé du Sujet 4 1er tour 2021

Exercice 1: (25 points)

On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&5&1\\3&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&-4&1\\2&4&2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

1) Calculer AB, AC et AD.

2) Trouver toutes les matrices carrées M d'ordre 3 telles que AM=0 (où 0 désigne la matrice nulle).

Corrigé de l'Exercice 1

1) $$AB=\begin{pmatrix}4&6&2\\3&0&3\\5&12&1\end{pmatrix};\quad AC=\begin{pmatrix}4&6&2\\3&0&3\\5&12&1\end{pmatrix}\text{ et } AD=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2) Si $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&i&j\end{pmatrix}$ alors

$$AM=\begin{pmatrix}a+g&b+i&c+j\\d+g&e+i&f+j\\2a-d+g&2b-e+i&2c-f+j\end{pmatrix}$$

$$AM = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+g=0 \\ d+g=0 \\ 2a-d+g=0 \\ b+i=0 \\ e+i=0 \\ 2b-e+i=0 \\ c+j=0 \\ f+j=0 \\ 2c-f+j=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=d=-g \\ b=e=-i \\ c=f=-j \end{cases}$$

donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}}$

<u>Exercice 2: (25 points)</u>

1) Résoudre l'équation $Z^2 - 104Z + 4913 = 0 \quad (E)$.

2) Soit z_1 **et** z_2 **deux complexes tels que** $z_1 z_2 = 17$ **et soit** $x = z_1 + z_2$

Montrer que $x^3 = 51x + 104$ **si et seulement si** z_1^3 **et** z_2^3 **sont les solutions de l'équation (E).**

3) On appelle entier de Gauss tout nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers relatifs.

C'est-à-dire: $z = a + ib$ **avec** $a, b \in \mathbb{Z}$.

Montrer que les solutions de (E) sont des cubes d'entiers de Gauss.

4) En déduire que l'équation $x^3 = 51x + 104$ a une solution entière que l'on déterminera.

Corrigé de l'Exercice 2

1) $\Delta' = 52^2 - 4913 = 2704 - 4913 = -2209 = -(2500 + 9 - 300)$

$\Rightarrow \Delta' = -(50^2 + 3^2 - 2 \times 50 \times 3) = -47^2$

donc les solutions de (E) sont $52 + 47i$ et $52 - 47i$.

2) Si $x^3 = 51x + 104$ alors $(z_1 + z_2)^3 = 51(z_1 + z_2) + 104$

$$\Leftrightarrow z_1^3 + z_2^3 + 3z_1z_2(z_1 + z_2) = 51(z_1 + z_2) + 104$$
$$\Rightarrow z_1^3 + z_2^3 = (51 - 3z_1z_2)(z_1 + z_2) + 104 = 104 .$$

En plus $z_1z_2 = 17 \Rightarrow$

$$z_1^3z_2^3 = 17^3 = (20-3)^3 = 8000 - 3600 + 540 - 27 = 4913$$

D'où $\begin{cases} z_1^3 + z_2^3 = 104 \\ z_1^3 \times z_2^3 = 4913 \end{cases}$ donc z_1^3 et z_2^3 sont solutions de l'équation

$Z^2 - 104Z + 4913 = 0$ qui est (E) .

Réciproquement :

Si z_1^3 et z_2^3 sont solutions de l'équation (E) alors on a

$$\begin{cases} z_1^3 + z_2^3 = 104 \\ z_1^3 \times z_2^3 = 4913 = 17^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1^3 + z_2^3 = 104 \\ z_1z_2 = 17 \end{cases} .$$

Or $x^3 = z_1^3 + z_2^3 + 3z_1z_2(z_1+z_2) \Rightarrow x^3 = 104 + 51x$

3) Soient a et b deux entiers tels que $(a+bi)^3 = 52+47i$ c'est-à-dire que $\begin{cases} a^3 - 3a^2b = 52 \\ 3ab^2 - b^3 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2-3b^2) = 52 \\ b(3a^2-b^2) = 47 \end{cases}$ (S) **.**

Donc b est un diviseur de 47 qui est un nombre premier alors $b \in \{1;-1;47;-47\}$

En prenant $b=1$ **le système** (S) **s'écrit** $\begin{cases} a(a^2-3) = 52 \\ 3a^2 - 1 = 47 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 16 \text{ et } 13a = 52 \Rightarrow a = 4$

D'où $(4+i)^3 = 52+47i \Rightarrow (4-i)^3 = 52-47i$ **donc les solutions de l'équation** (E) **sont des cubes d'entiers de Gauss.**

4) Soient $z_1 = 4+i$ **et** $z_2 = 4-i$ **donc** $z_1z_2 = 17$**, en plus** $z_1^3 = 52+47i$ **et** $z_2^3 = 52-47i$ **sont les solutions de** (E) **alors d'après la question 2) on a** $x = z_1 + z_2$ **est solution de l'équation** $x^3 = 51x+104$**. Or** $z_1 + z_2 = 8$**. D'où 8 est une solution de l'éqution** $x^3 = 51x+104$**.**

Remarque :

les solutions de $x^3 = 51x+104$ **sont** $8; -4+\sqrt{3}$ et $-4-\sqrt{3}$

Exercice 3: (25 points)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et on note D, E et F les pieds de ses hauteurs issues respectivement de A, B et C

Les cercles inscrits dans les triangles BDF et CDE sont notés Γ_B et Γ_C. Soit I et J leurs centres respectifs.

La droite (DF) est tangente à Γ_B au point M.

La droite (DE) est tangente à Γ_C au point N.

La droite (MN) recoupe les cercles Γ_B et Γ_C en P et Q respectivement ($P \neq M$ et $Q \neq N$).

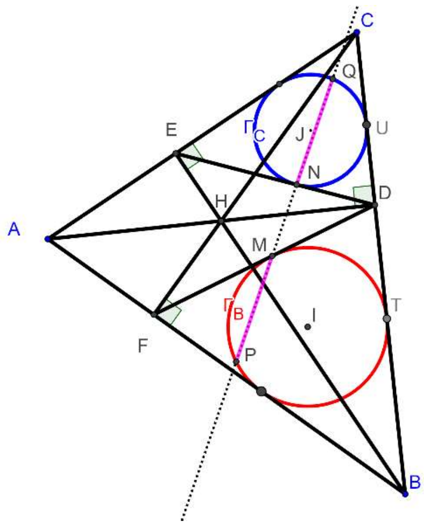
1) Faire une figure.

2) Montrer que $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DI}) = (\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DN}) \quad [\pi]$.

3) Montrer que $PM = QN$.

Corrigé de l'Exercice 3

1) Figure



2) On note r_B et r_C les rayons respectifs des cercles Γ_B et Γ_C ; T et U leurs points de contact avec la tangente commune (BC).

Les triangles ACD et ACF sont rectangles de même hypoténuse. Alors les points A,F,D et C sont cocycliques. Il en est de même pour les points A,B,D et E

Donc on a (modulo π) :

$$(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DT}) \qquad \text{symétrie}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}) \qquad \text{colinéarité}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}) \qquad \text{cocyclicité}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}) \qquad \text{colinéarité}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}) \qquad \text{cocyclicité}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DU},\overrightarrow{DN}) \qquad \text{colinéarité}$$
$$= (\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DN}) \qquad \text{symétrie}$$

3) Les triangles rectangles DMI et DNJ sont semblables (mêmes mesures d'angles).

$$\frac{DN}{DM} = \frac{JN}{JM} = \frac{r_C}{r_B} .$$

D'autre part, $\dfrac{\sin\widehat{MND}}{DM} = \dfrac{\sin\widehat{DMN}}{DN} \Rightarrow \dfrac{DN}{DM} = \dfrac{\sin\widehat{DMN}}{\sin\widehat{MND}}$.

On a : $PM = 2r_B\sin\widehat{MTP}$ **et** $(\overrightarrow{TM},\overrightarrow{TP}) = (\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MP}) = (\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MN})[\pi]$

donc $PM = 2r_B\sin\widehat{DMN}$

$QN = 2r_C\sin\widehat{QUN}$ **et** $(\overrightarrow{UN},\overrightarrow{UQ}) = (\overrightarrow{NE},\overrightarrow{NQ}) = (\overrightarrow{ND},\overrightarrow{NM})[\pi]$ **donc**

$QN = 2r_C\sin\widehat{MND}$

Donc $\dfrac{PM}{QN}=\dfrac{2r_B\sin\widehat{DMN}}{2r_C\sin\widehat{MND}}=\dfrac{r_B}{r_C}\times\dfrac{\sin\widehat{DMN}}{\sin\widehat{MND}}=\dfrac{DM}{DN}\times\dfrac{DN}{DM}=1$.

Enfin $PM=QN$.

Exercice 4: (25 points)

Soit n un entier naturel strictement positif. x et y deux réels positifs tels que $x^n+y^n=1$.

1) Montrer que pour tout réel $t\in\left]0,1\right[$: $\dfrac{1+t^2}{1+t^4}<\dfrac{1}{t}$.

2) Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right)<\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$.

Corrigé de l'Exercice 4

1) $\forall t\in\left]0,1\right[$ on a

$$\left(1+t^4\right)-t\left(1+t^2\right)=(1-t)(1-t^3)>0\Rightarrow t\left(1+t^2\right)<1+t^4\Rightarrow\frac{1+t^2}{1+t^4}<\frac{1}{t}$$

2) Remarquons que $x^n+y^n=1\Leftrightarrow x^n=1-y^n$ et $y^n=1-x^n$.

En prenant $t = x^k$ on trouve

$$\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} = \frac{1+t^2}{1+t^4} < \frac{1}{t} = \frac{1}{x^k} \Rightarrow \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} < \frac{1}{x^k}$$ **. D'où**

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x^k} = \frac{1}{x}\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x^n-1}{x^n\left(x-1\right)} = \frac{y^n}{x^n(1-x)}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} < \frac{y^n}{x^n(1-x)} \quad (1)}$$

Par analogie on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y^k} = \frac{y^n-1}{y^n\left(y-1\right)} = \frac{x^n}{y^n(1-y)}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}} < \frac{x^n}{y^n(1-y)} \quad (2)}$$

Le produit des relations (1) et (2) **donne**

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{y^n}{x^n(1-x)} \times \frac{x^n}{y^n(1-y)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

D'où $$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}}.$$

Corrigé du Sujet 5 $\qquad$ 1er tour 2020

Enoncé de l'Exercice 1

On donne la matrice: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A tout réel x on associe la matrice $M(x) = I_3 + xA + \frac{1}{2}x^2A^2$

1) Calculer A^2 et A^3 et en déduire, pour tout entier $n > 3$, la valeur de A^n.

2) Montrer que $M(x)M(y) = M(x+y)$.

3) Soit n un entier naturel. Ecrire les matrices $M(x)$ et $\left(M(x)\right)^n$ sous forme de tableaux.

Corrigé de l'Exercice 1 :

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = 0_3$$

Pour tout entier $n > 3$, on a $A^n = A^3 \times A^{n-3} = 0_3 \times A^{n-3} = 0_3$.

2) On a $M(x)M(y) = \left(I_3 + xA + \frac{1}{2}x^2A^2\right)\left(I_3 + yA + \frac{1}{2}y^2A^2\right)$ donc

$$M(x)M(y) = I_3 + yA + \frac{1}{2}y^2A + xA + xyA^2 +$$
$$\frac{1}{2}xy^2A^3 + \frac{1}{2}x^2A^2 + \frac{1}{2}x^2yA^3 + \frac{1}{2}x^2y^2A^4$$

or $A^3 = A^4 = 0_3$, d'où

$$M(x)M(y) = I_3 + yA + \frac{1}{2}y^2A^2 + xA + xyA^2 + \frac{1}{2}x^2A^2$$
$$= I_3 + (x+y)A + \left(\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2\right)A^2$$

$$\Rightarrow M(x)M(y) = I_3 + (x+y)A + \frac{1}{2}(x+y)^2 A^2 = M(x+y)$$

3) $M(x) = I_3 + xA + \frac{1}{2}x^2A^2 \Rightarrow$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(M(x)\right)^2 = M(x)M(x) = M(2x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 2x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\left(M(x)\right)^{n}=M(x)\left(M(x)\right)^{n-1}$, on démontre alors par récurrence

que $\left(M(x)\right)^{n}=M(nx)=\begin{pmatrix} 1 & nx & \frac{1}{2}n^{2}x^{2} \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Enoncé de l'Exercice 2

Soit Γ et Γ' deux cercles qui se coupent en A et B. Les tangentes en A à Γ et Γ' recoupent respectivement Γ' et Γ en D et C et la droite (CD) recoupe le cercle Γ en un point M différent de B. On se propose de montrer que la droite (MB) passe par le milieu du segment $[AD]$

1) Soit N le point d'intersection de (BM) avec Γ'. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD}\right)$.

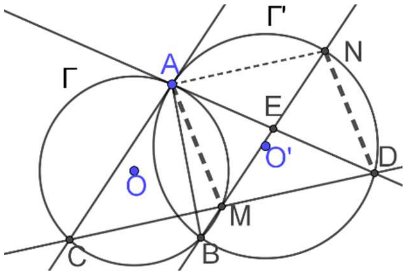
2) Déterminer la nature du quadrilatère $AMDN$ puis conclure.

Corrigé de l'Exercice 2 :

1) En appliquant le théorème de la tangente avec celui de la cocyclicité sur Γ' on trouve

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AN}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BN}\right)\quad[\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA}\right)\quad[\pi]$, d'où :

$$\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right)=\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CM}\right)=\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)\quad[\pi]$$



$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)\quad[\pi]\Rightarrow\boxed{\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD}\right)=0\quad[\pi]}.$$

Donc (AN) est parallèle à (CD).

2) En appliquant le théorème de la tangente avec celui de la cocyclicité sur Γ on trouve

$$\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)\quad[\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)\quad[\pi]\ ,$$

d'où :

$$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{DN}\right)=\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DN}\right)=\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BN}\right)\quad[\pi]$$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{DN}\right)=0\quad[\pi]$ alors les droites (AM) et (DN) sont également parallèles. D'où $AMDN$ est un parallélogramme ce qui montre que les segments $[AD]$ et $[MN]$ ont le même milieu donc la droite (MB) passe par le milieu du segment $[AD]$

Enoncé de l'Exercice 3

On considère dans $\mathbb{C}$, les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.

1) Montrer que $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul.

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b (on suppose que les points O, A et B ne sont pas alignés).
Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre du système $\{(A,|b|);(B,|a|)\}$.

3.a) A l'aide de la question 1), montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

b) Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$.

c) En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Corrigé de l'Exercice 3

1) $$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}=\frac{\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}\right)^2}{e^{i\alpha}e^{i\beta}}=\frac{\left(2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)^2}{e^{i(\alpha+\beta)}}=4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

donc c'est un réel positif ou nul.

2) $I = bar\left\{\left(A,|b|\right);\left(B,|a|\right)\right\} \Leftrightarrow z = \dfrac{a|b| + b|a|}{|a| + |b|}$

3. a) On a

$$z^2 = \left(\frac{a|b| + b|a|}{|a| + |b|}\right)^2 = \left(|a||b|\right)^2 \left(\frac{\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}}{|a| + |b|}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{ab} = \frac{\left(|a||b|\right)^2}{ab}\left(\frac{\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}}{|a| + |b|}\right)^2 = \frac{|a||b|}{\left(|a| + |b|\right)^2} \frac{\left(\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}\right)^2}{\frac{a}{|a|} \times \frac{b}{|b|}}.$$

Comme $\dfrac{|a||b|}{\left(|a| + |b|\right)^2}$ est un réel positif et $\dfrac{\left(\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}\right)^2}{\frac{a}{|a|} \times \frac{b}{|b|}}$ est de la forme $\dfrac{\left(z_1 + z_2\right)^2}{z_1 z_2}$ avec $z_1 = \dfrac{a}{|a|}$ et $z_2 = \dfrac{b}{|b|}$ qui sont de module 1,

alors $\dfrac{z^2}{ab}$ est un réel positif .

⇨ Si le réel $\dfrac{|a||b|}{\left(|a| + |b|\right)^2} \neq 0$ car si $|a| = 0$ ou $|b| = 0$ alors les points

O, A et B seront réduits à 2 et donc alignés.

$\Rightarrow$ si $\dfrac{\left(\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}\right)^2}{\dfrac{a}{|a|}\times\dfrac{b}{|b|}}=0$ alors

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0\Rightarrow\frac{b}{a}=-\frac{|b|}{|a|}=-1\Rightarrow\arg\left(\frac{b}{a}\right)=\pi\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\pi\ \Rightarrow$$

O, A et B alignés.

D'où $\dfrac{z^2}{ab}\neq 0$ et par conséquence il est un réel strictement positif.

b) $\dfrac{z^2}{ab}\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow\arg\left(\dfrac{z^2}{ab}\right)=0\Rightarrow\boxed{\arg z=\dfrac{1}{2}\left(\arg a+\arg b\right)}$

c) $\arg z=\dfrac{1}{2}\left(\arg a+\arg b\right)\ \Rightarrow\arg z-\arg a=\dfrac{1}{2}\left(\arg b-\arg a\right)$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

D'où $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Enoncé de l'Exercice 4

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1) Le triangle ABC est équilatéral

2) j ou j^2 est racine de l'équation $az^2+bz+c=0$

3) $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

4) $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0$

Corrigé de l'Exercice 4

On a $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ en plus on a $j^3=1; \overline{j}=j^2=\frac{1}{j}$

- Supposons que le triangle ABC est équilatéral alors
- $\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{c-a}{b-a}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ or $\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow c-a=be^{i\frac{\pi}{3}}-ae^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow$

$(-1+e^{i\frac{\pi}{3}})a-be^{i\frac{\pi}{3}}+c=0 \Rightarrow ja+bj^2+c=0 \Rightarrow aj^4+bj^2+c=0$ et

$\frac{c-a}{b-a}=e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow c-a=be^{-i\frac{\pi}{3}}-ae-^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow (-1+e^{-i\frac{\pi}{3}})a-be^{-i\frac{\pi}{3}}+c=0$.

$\Rightarrow aj^2+bj+c=0$

D'où $\boxed{P_1 \Rightarrow P_2}$

- Si j est solution de l'équation $az^2+bz+c=0$ alors on a

$aj^2+bj+c=0 \Rightarrow a(j^2+1)+bj+(c-a)=0$

$\Rightarrow j(b-a)+(c-a)=0 \Rightarrow \frac{c-a}{b-a}=-j=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc ABC est

équilatéral. De même si j^2 est solution de $az^2+bz+c=0$ alors

$aj^4+bj^2+c=0 \Rightarrow a(j^4+1)+bj^2+(c-a)=0$

$\Rightarrow j^2(b-a)+(c-a)=0 \Rightarrow \dfrac{c-a}{b-a}=-j^2=e^{i\frac{\pi}{3}}$ **donc ABC est équilatéral. D'où** $\boxed{P_2 \Rightarrow P_1}$

- **Si ABC est équilatéral alors d'après Alkashi on a :**

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow a^2=b^2+c^2-bc$ **par analogie on exprime** b^2 **et** c^2 **, alors on a**

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-bc \\ b^2=c^2+a^2-ac \\ c^2=a^2+b^2-ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2)-(bc+ac+ab)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=bc+ac+ab$$

D'où $\boxed{P_1 \Rightarrow P_3}$ **. Réciproquement si** $a^2+b^2+c^2=bc+ac+ab$ **alors on a**

$$\begin{aligned} a^2+b^2-2ab &= -c^2+bc+ac-ab \\ &= c(b-c)+a(c-b) \\ &= (b-c)(c-a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a-b)^2=(b-c)(c-a)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b} &= \frac{b-a}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{a-b} \\ &= \frac{b-a}{(b-a)^2}+\frac{1}{a-b} \\ &= \frac{1}{b\text{-}a}+\frac{1}{a-b} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\boxed{P_3 \Rightarrow P_4}$

- Supposons que $\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}=0$ alors on a

$$\begin{cases} \dfrac{b-a}{(b-c)(c-a)} = -\dfrac{1}{a-b} \\ \dfrac{c-b}{(a-b)(c-a)} = -\dfrac{1}{b-c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b-a}{b-c} = \dfrac{c-a}{b-a} \\ \dfrac{c-b}{c-a} = \dfrac{b-a}{b-c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \arg\dfrac{c-a}{b-a} = \arg\dfrac{b-a}{b-c} = \arg\dfrac{c-b}{c-a}$$

- donc le triangle ABC est équilatéral. D'où $\boxed{P_4 \Rightarrow P_1}$.

Conclusion : On a démontré que $P_1 \Leftrightarrow P_2$ et $P_1 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_1$

donc les 4 propositions sont équivalentes.

Enoncé de l'Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\quad \mathrm{ppcm}(x,y) - \mathrm{pgcd}(x,y) = 243$.

Corrigé de l'Exercice 5

Soit (E) l'équation $\mathrm{ppcm}(x,y) - \mathrm{pgcd}(x,y) = 243$ et soit $d = \mathrm{pgcd}(x,y)$. Il existe deux entiers x' et y' premiers entre eux tels que $x = dx'$ et $y = dy'$. Dans ce cas on a $\mathrm{ppcm}(x,y) = dx'y'$,

donc l'équation (E) **s'écrit** $dx'y' - d = 243 \Leftrightarrow d(x'y' - 1) = 243$.

Alors d est un diviseur de 243 or $243 = 3^5$ **et ses diviseurs sont**

$1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243$ **et** $x'y' = 1 + \dfrac{243}{d}$

$\boxed{1^{er}\ \text{cas}}$ $d = 1$ **alors** $x'y' = 244 = 2^2 \times 61$ **alors :**

⇨ $x' = 1 \Rightarrow y' = 244 \Rightarrow \boxed{x = 1 \text{ et } y = 244}$

⇨ $x' = 4 \Rightarrow y' = 61 \Rightarrow \boxed{x = 4 \text{ et } y = 61}$

⇨ $x' = 61 \Rightarrow y' = 4 \Rightarrow \boxed{x = 61 \text{ et } y = 4}$

⇨ $x' = 244 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow \boxed{x = 244 \text{ et } y = 1}$

$\boxed{2^{ème}\ \text{cas}}$ $d = 3$ **alors** $x'y' = 82 = 2 \times 41$ **alors :**

⇨ $x' = 1 \Rightarrow y' = 82 \Rightarrow \boxed{x = 3 \text{ et } y = 246}$

⇨ $x' = 2 \Rightarrow y' = 41 \Rightarrow \boxed{x = 6 \text{ et } y = 123}$

⇨ $x' = 41 \Rightarrow y' = 2 \Rightarrow \boxed{x = 123 \text{ et } y = 6}$

⇨ $x' = 82 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow \boxed{x = 246 \text{ et } y = 3}$

$\boxed{3^{ème}\ \text{cas}}$ $d = 9$ **alors** $x'y' = 28 = 2^2 \times 7$ **alors :**

⇨ $x' = 1 \Rightarrow y' = 28 \Rightarrow \boxed{x = 9 \text{ et } y = 252}$

⇨ $x' = 4 \Rightarrow y' = 7 \Rightarrow \boxed{x = 36 \text{ et } y = 63}$

⇨ $x' = 7 \Rightarrow y' = 4 \Rightarrow \boxed{x = 63 \text{ et } y = 36}$

⇨ $x' = 28 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow \boxed{x = 252 \text{ et } y = 9}$

$\boxed{4^{\text{ème}}\ \text{cas}}$ $d = 27$ alors $x'y' = 10 = 2 \times 5$ alors :

⇨ $x' = 1 \Rightarrow y' = 10 \Rightarrow \boxed{x = 27 \text{ et } y = 270}$

⇨ $x' = 2 \Rightarrow y' = 5 \Rightarrow \boxed{x = 54 \text{ et } y = 135}$

⇨ $x' = 5 \Rightarrow y' = 2 \Rightarrow \boxed{x = 135 \text{ et } y = 54}$

⇨ $x' = 10 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow \boxed{x = 270 \text{ et } y = 10}$

$\boxed{5^{\text{ème}}\ \text{cas}}$ $d = 81$ alors $x'y' = 4$ alors :

⇨ $x' = 1 \Rightarrow y' = 4 \Rightarrow \boxed{x = 81 \text{ et } y = 324}$

⇨ $x' = 4 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow \boxed{x = 324 \text{ et } y = 81}$

⇨

$\boxed{6^{\text{ème}}\ \text{cas}}$ $d = 243$ alors $x'y' = 2$ alors :

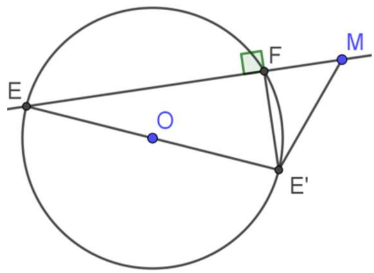
⇨ $x' = 1 \Rightarrow y' = 2 \Rightarrow \boxed{x = 243 \text{ et } y = 486}$

⇨ $x' = 2 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow \boxed{x = 486 \text{ et } y = 243}$

<u>Exercice 1 :</u> (20 points)

Soit A un point d'un cercle Γ de centre O et de rayon R.

Soit Γ' un cercle de centre A qui rencontre Γ en P et Q .



M un point de Γ' distinct de P et Q tel que (MP) recoupe Γ en B et (MQ) recoupe Γ en D . On cherche à démontrer par deux méthodes que : $(BD)\perp(AM)$.

1° <u>Méthode</u> 1 : Puissance d'un point par rapport à un cercle.

a) Soit Δ_M une droite quelconque passant par M qui coupe Γ en E et F . Placer $E'=S_O(E)$ et montrer que $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=OM^2-R^2$

(ce nombre est appelé la puissance du point M par rapport à Γ)

b) Que peut-on dire de $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MD}$?

c) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$

2° <u>Méthode</u> 2 : Angles orientés

a) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=\pi$

b) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$

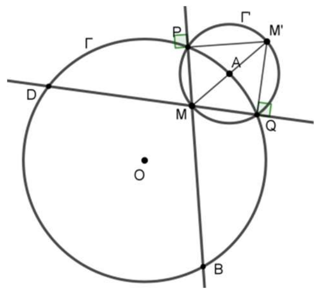
Solution

1° Méthode1 : Puissance d'un point par rapport à un cercle.

On a : $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{ME'} = OM^2 - \dfrac{EE'^2}{4} = OM^2 - R^2$.

Comme ce nombre est indépendant de la droite Δ_M **,**

alors $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{MD} = OM^2 - R^2$.



Soit $M' = S_A(M)$**, on a :**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{DB} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}.\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MD}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{MD}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

D'où les droites (DB) **et** (AM) **sont perpendiculaires.**

2° Méthode 2 : Angles orientés

a)On remarque que AMQ est un triangle isocèle donc

$\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right) = \left(\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QM}\right)[\pi]$ **et comme la somme des angles orientés**

d'un triangle est égale à π **alors** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AQ}\right) + 2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right) = \pi$

b) On a:

$$
\begin{aligned}
2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{MA}\right) &= 2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DM}\right)+2\left(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{MA}\right)\\
&= 2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)\\
&= 2\left(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{MA}\right) &= 2\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)\\
&= \pi
\end{aligned}
$$

D'où $2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{MA}\right)=\pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$. Donc les droites (DB) et (AM) sont perpendiculaires.

Exercice 2 ; (20 points)

Soit le nombre : $X=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

1° Calculer X^3

2° Montrer que X est un entier naturel que l'on déterminera.

Solution

1° $X^3=18+3\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right) \Rightarrow X^3=18+3X$

2° On a $X^3-3X-18=0$ Avec

$$X=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \geq \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \geq \sqrt[3]{8}=2 \Rightarrow X \geq 2$$

Soit $f(x)=x^3-3x-18$, $\forall x\geq 2$. $f'(x)=3x^2-3\geq 9>0$ donc f est continue et strictement croissante sur $[2;+\infty[$ alors c'est une bijection de cet intervalle sur son image qui est $[-16;+\infty[$.

D'où l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[2;+\infty[$.

Or $f(3)=0$, donc 3 est la seule solution de cette équation . On en déduit donc que $X=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$.

Exercice 3 : (20 points)

1° Soit $A=p^2(2p+1)^2$ où $p\in\mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division de A par 10.

2° Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+...+n^3$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) Quel est le chiffre des unités de S_{2018} ?

c) Quel est le chiffre des unités de $\left(\dfrac{S_{2019}}{900}\right)^{2019}$?

Solution

1° Soit $A=p^2\left(2p+1\right)^2$ où $p\in\mathbb{N}$. Déterminons les restes possibles de la division de A par 10.

reste de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
reste de 2p+1	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9
reste de p²	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
reste de (2p+1)²	1	9	5	9	1	1	9	5	9	1
Reste de A	0	9	0	1	6	5	4	5	6	1

Alors les restes possibles de la division de A par 10 sont : 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9.

2° a) Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3$. Montrons par récurrence que $S_n=\dfrac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$

On a $S_1=1^3=1=\dfrac{1^2\times 2^2}{4}$, donc la proposition est vraie pour $n=1$

.Supposons que $S_n=\dfrac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$, or

$$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+\left(n+1\right)^3=S_n+\left(n+1\right)^3\Rightarrow$$

$$S_{n+1}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

.

D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$ **on a** $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

b) On a $S_{2018}=\sum_{k=1}^{2018}k^3=\frac{2018^2\times2019^2}{4}=1009^2\times2019^2=p^2(2p+1)^2$

avec $p=1009$ **et d'après le tableau de congruence de la question 1° on a le dernier chiffre de** S_{2018} **est 1.**

c) D'après a) on a

$S_{2019}=\sum_{k=1}^{2019}k^3=\frac{2019^2\times2020^2}{4}=2019^2\times1010^2=(2019\times1010)^2$ **donc**

$$\frac{S_{2019}}{900}=\left(\frac{2019\times1010}{30}\right)^2=(673\times101)^2$$

Or

$$\begin{cases}673\equiv3\ [10]\\ 101\equiv1\ [10]\end{cases}$$

$\Rightarrow 673\times101\equiv3[10]$.

$\Rightarrow (673\times101)^2\equiv9[10]$

$\Rightarrow (673\times101)^2\equiv-1[10]$

D'où

$\frac{S_{2019}}{900} \equiv -1[10]$

$\Rightarrow \left(\frac{S_{2019}}{900}\right)^{2019} \equiv (-1)^{2019}[10]$

$\Rightarrow \left(\frac{S_{2019}}{900}\right)^{2019} \equiv -1[10] \Rightarrow \left(\frac{S_{2019}}{900}\right)^{2019} \equiv 9[10]$

D'où le chiffre des unités de $\left(\frac{S_{2019}}{900}\right)^{2019}$ est 9.

Exercice 4 : (20 points)

Soient n un entier naturel non nul et α un réel.

1° Résoudre le système $\begin{cases} u^n + v^n = 2\sin\alpha \\ uv = 1 \end{cases}$, où u et v sont des nombres complexes.

2° Résoudre le système $\begin{cases} (z_1 + iz_2)^n + (z_1 - iz_2)^n = 2\sin\alpha \\ {z_1}^2 + {z_2}^2 = 1 \end{cases}$, où z_1 et z_2 sont des nombres complexes.

Corrigé

1) $v = \frac{1}{u} \Rightarrow u^n + \frac{1}{u^n} = 2\sin\alpha \Rightarrow u^{2n} - 2u^n \sin\alpha + 1 = 0$

C'est une équation du 2nd degré en u^n, on a

$\Delta' = \sin^2\alpha - 1 = (i\cos\alpha)^2$ d'où

$u^n = \sin\alpha - i\cos\alpha = e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$ ou $u^n = \sin\alpha + i\cos\alpha = e^{-i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$.

Or $\left(u^n = e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow u = e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}\right)$ et

$\left(u^n = e^{-i(\alpha-\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow u = e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}\right)$ avec k un entier prenant les

valeurs de 1 à n-1.

Donc les solutions sont $\begin{cases} u = e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} \\ v = e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} \end{cases}$ ou $\begin{cases} u = e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} \\ v = e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} \end{cases}$

2° $\begin{cases} (z_1+iz_2)^n + (z_1-iz_2)^n = 2\sin\alpha \\ {z_1}^2 + {z_2}^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z_1+iz_2)^n + (z_1-iz_2)^n = 2\sin\alpha \\ (z_1+iz_2)(z_1-iz_2) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u^n + v^n = 2\sin\alpha \\ uv = 1 \end{cases}$

avec $z_1 + iz_2 = u$ et $z_1 - iz_2 = v \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}(u+v)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(u-v)$.

D'où $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(u+v) \\ z_2 = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(u+v) \\ z_2 = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} + e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}}{2} \\ z_2 = \dfrac{e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} - e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z_1 = \dfrac{e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} + e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}}{2} \\ z_2 = \dfrac{e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} - e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{(4k-1)\pi}{2n}) \\ z_2 = \sin(\frac{\alpha}{n} + \frac{(4k-1)\pi}{2n}) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z_1 = \cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{(4k-1)\pi}{2n}) \\ z_2 = -\sin(\frac{\alpha}{n} + \frac{(4k-1)\pi}{2n}) \end{cases} \text{ avec}$$

$k \in \{0;1;2;...;n-1\}$

Exercice 5 : (20 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ où a est un réel non nul. On se propose de déterminer les réels x_n et y_n tels que $A^n = x_n A + y_n I_2$, où I_2 est la matrice unité d'ordre 2.

1° Calculer A^2 et A^3.

2° Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n$.

3° Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \left(2^n - 1\right)A + \left(2 - 2^n\right)I_2$.

4° Déterminer la matrice inverse de A^{2019}.

Solution

1° $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7a & 8 \end{pmatrix}$

2° On remarque que $A^2 = 3A - 2I_2$ et

$A^3 = A \times (3A - 2I_2) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I_2) - 2A = 7A - 6I_2$

On sait que $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1 = 1 = 3x_0 + y_0 \\ y_1 = 0 = -2x_0 \end{cases}$

en plus $A^2 = 3A - 2I_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 = 3x_1 + y_1 \\ y_2 = -2 = -2x_1 \end{cases}$

Comme $A^n = x_n A + y_n I_2$ alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (x_n A + y_n I_2)A \\ &= x_n A^2 + y_n A \\ &= x_n\left(3A - 2I_2\right) + y_n A \\ &= (3x_n + y_n)A - 2x_n I_2 \end{aligned}$$

Or $A^{n+1} = x_{n+1}A + y_{n+1}I_2$, d'où $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n$.

3° Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_n = 2^n - 1 \\ y_n = 2 - 2^n \end{cases}$

On a $\begin{cases} x_0 = 0 = 2^0 - 1 \\ y_0 = 2 - 2^0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1 = 1 = 2^1 - 1 \\ y_1 = 0 = 2 - 2^1 \end{cases}$.

La proposition est donc vraie pour $n = 0$ et $n=1$

Supposons que

$$\begin{cases} x_n = 2^n - 1 \\ y_n = 2 - 2^n \end{cases}$$

on a alors $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n = 3\left(2^n - 1\right) + 2 - 2^n = 2^{n+1} - 1 \\ y_n = -2x_n = -2\left(2^n - 1\right) = 2 - 2^{n+1} \end{cases}$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_n = 2^n - 1 \\ y_n = 2 - 2^n \end{cases}.$$

Ce qui montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \left(2^n - 1\right)A + \left(2 - 2^n\right)I_2 .$$

4° D'après 3° on a

$$A^n = \left(2^n - 1\right)A + \left(2 - 2^n\right)I_2$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 0 \\ \left(2^n - 1\right)a & 2\left(2^n - 1\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(2^n - 1\right)a & 2^n \end{pmatrix}$$

On a $\det A^n = 2^n$ donc A^n est inversible soit B_n sa matrice inverse on a :

$$B_n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ \left(1 - 2^n\right)a & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(2^{-n} - 1\right)a & 2^{-n} \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de A^{2019} est donc la matrice

$$B_{2019} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(2^{-2019} - 1\right)a & 2^{-2019} \end{pmatrix}$$

Corrigé du Sujet 7 1er tour 2018

<u>Exercice 1 :</u> (20 points)

ABCD est un carré direct de coté 1, (Q) est un quart de cercle de centre C et passant par B et D.

M est un point variable du segment [AB] distinct de A et B. Par le point M on trace la tangente à (Q) qui coupe le coté [AD] en N. Le point de contact de la tangente avec (Q) est nommé T.

On pose $AM = x$ et $AN = y$ avec $0<x<1$ et $0<y<1$

1. a) Faire une figure et démontrer que : $MN = 2 - x - y$

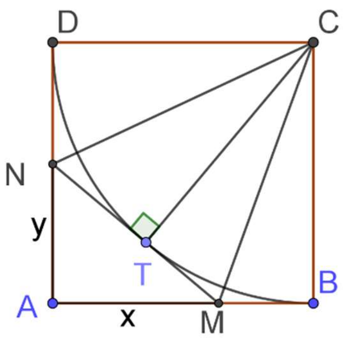
b) En déduire que $y = 2 + \dfrac{2}{x-2}$

2) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale. Calculer cette distance.

3) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMN est maximale. Calculer cette aire.

<u>Corrigé</u>

1° a) La construction de la figure



CTM et CBM sont deux triangles rectangles de même hypothénuse CM.

En plus $CT = CB$ (égale au rayon du cercle). D'où les triangles CTM et CBM sont isométriques et que $MB = TM$.

De même les triangles CTN et CDN sont isométriques (même raisonnement) d'où $TN = DN$.

On a

$$\begin{aligned}MN &= TM + TN\\ &= BM + DN\\ &= (AB - AM) + (AD - AN).\\ &= (1-x) + (1-y)\\ &= 2 - x - y\end{aligned}$$

b) On a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$. D'après le théorème de Pythagore on a $AN^2 + AM^2 = MN^2$. En utilisant la question précédente on trouve $x^2 + y^2 = (2 - x - y)^2 = 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy$. Cette égalité donne $4 - 4x - 4y + 2xy = 0$ et par conséquence

$$y(x-2) = 2x - 2 \Rightarrow y = \frac{2x-2}{x-2} = \frac{2(x-2)+2}{x-2} = 2 + \frac{2}{x-2}$$

2° D'après la question 1° on a :

$$MN = 2 - x - y = 2 - x - \left(2 + \frac{2}{x-2}\right) = -x - \frac{2}{x-2} = \frac{-x^2 + 2x - 2}{x-2}$$

Soit $f(x) = -x - \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{-x^2 + 2x - 2}{x-2}$ où $x \in [0,1]$

La dérivée f' de f est définie par :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{2 - (x-2)^2}{(x-2)^2} = \frac{\left(x - 2 + \sqrt{2}\right)\left(-x + 2 + \sqrt{2}\right)}{(x-2)^2}.$$

Comme $x \in [0,1]$ alors $-x + 2 + \sqrt{2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2 + \sqrt{2}$ qui s'annule et change de signe en $x_0 = 2 - \sqrt{2}$ et on a alors le tableau de variation de f

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-2+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Ce qui montre que la distance MN est minimale pour $x = 2 - \sqrt{2}$ et la valeur minimale de cette distance est $-2 + 2\sqrt{2}$.

3° Le triangle AMN étant rectangle en A, son aire est donc

$$a(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\left(2 + \frac{2}{x-2}\right) = \frac{x^2 - x}{x-2} = x + \frac{x}{x-2} = x + 1 + \frac{2}{x-2}$$ **avec** $x \in [0,1]$.

La dérivée de la fonction a est

$$a'(x) = 1 - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 2}{(x-2)^2} = \frac{\left(x - 2 + \sqrt{2}\right)\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)}{(x-2)^2}$$ **et son tableau de variation est :**

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$a'(x)$		$+$	0	$-$	
$a(x)$	0	$\nearrow$	$3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Donc l'aire du triangle AMN est maximale si et seulement si $x = 2 - \sqrt{2}$ et cette aire maximale est égale à $3 - 2\sqrt{2}$

Exercice 2 ; (20 points)

Pour tout réel $a \neq 0$, on considère les matrices

$$M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ et } N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall b \in \mathbb{R}^*$ on a : $M_a \times M_b = M_{ab}$, $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$,

$M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$ et $N_b \times M_a = N_{ab}$.

2) Que peut-on dire de $(M_a)^n$? $(N_a)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$?

Corrigé

Pour tout réel $a \neq 0$, on note $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

et $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$

1) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall b \in \mathbb{R}^*$ on a : $M_a \times M_b = M_{ab}$,

$N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$, $M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$ et $N_b \times M_a = N_{ab}$

2) Que peut-on dire de $(M_a)^n$? $(N_a)^n$? où $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{a) } M_a.M_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{1}{ab}\right) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix}$$

$$= M_{ab}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_a.M_b = M_{ab}}$$

$$\text{b) } N_a \times N_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix}$$

$$N_a \times N_b = \begin{pmatrix} ab-ab+\frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{a}{b}-ab+\frac{b}{a}\right) \\ 0 & -ab+\frac{a}{b}+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right) \\ 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}}$$

c) $$M_a \times N_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} =$$

$$M_a \times N_b = \begin{pmatrix} ab-ab+\frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{a}{b}-ab+\frac{b}{a}\right) \\ -\frac{b}{a}\sqrt{3} & \frac{-b}{a} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right) \\ -\frac{b}{a}\sqrt{3} & \frac{-b}{a} \end{pmatrix} = N_{\frac{b}{a}}$$

d'où $\boxed{M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}}$

d) $$N_b \times M_a = \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$M_a \times N_b = \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}-\frac{1}{ab}\right) \\ -ab\sqrt{3} & -ab+\frac{b}{a}-\frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{1}{ab}\right) \\ -ab\sqrt{3} & -ab \end{pmatrix}$$

$$= N_{ab}$$

d'où $\boxed{M_a \times N_b = N_{ab}}$

2° D'après 1) on a : $M_a.M_b = M_{ab}$, d'où $M_a.M_a = M_{a^2}$ et on

démontre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(M_a)^n = M_{a^n}}$

De même comme $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$ alors on a

$N_a \times N_a = M_{\frac{a}{a}} = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ et on démontrer par récurrence

que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{(N_a)^{2p} = I}$ et on en déduit que

$\boxed{(N_a)^{2p+1} = N_a}$.

<u>Exercice 3 :</u> (20 points)

1) Resoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 3x - 2y = 1$.

2.a) Montrer que, pour tout entier naturel n, le couple $(14n+3, 21n+4)$ est solution de (E) .

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ les deux nombres $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

3.a) Soit $d = pgcd(21n+4, 2n+1)$. Justifier que $d=1$ ou $d=13$.

b) Montrer que $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6 [13]$.

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

a) Montrer que les deux nombres A et B sont divisibles par $n-1$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de n, le $pgcd(A,B)$.

Corrigé

1) Le couple $(1,1)$ est une solution particulière de (E).

Pour tout couple (x,y) solution de (E) on a

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3\times 1 - 2\times 1 = 1 \end{cases}$$ **d'où** $3(x-1) = 2(y-1)$.

Alors $\begin{cases} 2 | 3(x-1) \\ 3 | 2(y-1) \\ 3 \wedge 2 = 1 \end{cases}$ **et d'après le théorème de Gauss on a** $\begin{cases} 2 | (x-1) \\ 3 | (y-1) \end{cases}$

ce qui donne $x = 2m+1$ **et** $y = 3m+1$, $m \in \mathbb{Z}$

La solution générale (x,y) de (E) est $(2m+1, 3m+1)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

2.a) Comme, pour tout entier n on a $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$

alors $(14n+3, 21n+4)$ est une solution de (E).

b) La question précédente montre alors que le pgcd des deux nombres $14n+3$ et $21n+4$ est 1 (théorème de Bézout), c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}$ les deux nombres $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

3.a) Soit $d = \operatorname{pgcd}(21n+4, 2n+1)$.

On sait que

$$\begin{cases} 21n+4=10(2n+1)+n-6 \\ 2n+1=2(n-6)+13 \end{cases} \Rightarrow 21(2n+1)-2(21n+4)=13$$

Par conséquence d divise 13 et comme les diviseurs positifs de 13 ne sont que 1 et 13, on en déduit que $d=1$ ou $d=13$.

b) Supposons que $d=13$. Comme d divise $21n+4$ et $2n+1$ alors d divise $n-6$, donc $13|n-6$ c'est-à-dire que $n\equiv 6\ [13]$.

Réciproquement si $n\equiv 6\ [13]$ alors $n=13k+6$ d'où

$21n+4=13(21k+10)$ et $2n+1=13(2k+1)$, donc 13 divise

$21n+4$ et $2n+1$ alors 13 divise d et comme d est soit 1 soit 13 alors on a d=13.

D'où $d=13 \Leftrightarrow n\equiv 6\ [13]$.

4) a) La factorisation des nombres A et B donne

$$A=(n-1)(21n+4) \text{ et } B=(n-1)(2n+1)(14n+3).$$

Ce qui montre que les deux nombres A et B sont divisibles par $n-1$.

b) Comme $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux alors

$$\text{pgcd}(21n+4,(2n+1)(14n+3))=\text{pgcd}(21n+4,2n+1)=d$$

D'où $\text{pgcd}(A,B)=(n-1)d$.

⇨ Si $n \equiv 6\,[13]$ alors $\text{pgcd}(A,B) = 13(n-1)$

⇨ Si $n \not\equiv 6\,[13]$ alors $\text{pgcd}(A,B) = n-1$

<u>Exercice 4 :</u> (20 points)

Soit m un nombre complexe différent de 1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0.$$

1. a) Montrer que le discriminant Δ de (E) s'écrit sous la forme $\Delta = \left[(1+i)(m-1)\right]^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

c) Déterminer, sous forme algébrique, m tel que le produit des solutions de (E) soit égal à 1.

2) Ecrire la forme trigonométrique des complexes $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$, pour $m = e^{i\theta}$ $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$.

Corrigé

1° a) Le discriminant de (E) est

$$\Delta = \left[(1-i)(m+1)\right]^2 + 4i(m^2+1)$$
$$= -2i(m+1)^2 + 4i(m^2+1)$$
$$= 2i(-m^2 - 2m - 1 + 2m^2 + 2)$$
$$\Rightarrow \quad \Delta = 2i(m^2 - 2m + 1) = (1+i)^2(m-1)^2 = \left[(1+i)(m-1)\right]^2$$

b) Les solutions de l'équation (E) sont donc

$$z_1 = \frac{(1-i)(m+1) - (1+i)(m-1)}{2} = 1 - im \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{(1-i)(m+1) + (1+i)(m-1)}{2} = m - i.$$

c) Le produit des solutions de (E) est $p = -i(m^2+1)$.

$$p = 1 \Leftrightarrow -i(m^2+1) = 1 \Leftrightarrow m^2 + 1 = \frac{1}{-i} = i \Leftrightarrow m^2 = -1 + i \text{ Alors } p = 1$$

ssi m est une racine carrée de $-1+i$.

Si $m = x + iy$ une racine carrée de $-1+i$ alors (x , y) est une

solution du système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$ **.**

Le produit des solutions de (E) est égal à 1 ssi

$$m=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \text{ ou } m=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$

2° La forme trigonométrique des complexes $z_1 = 1 - im$ et

$z_2 = m - i$, pour $m = e^{i\theta}$ $(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$.

$$z_1=1-im=1-ie^{i\theta}=1+e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$ **. Comme**

$\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ **alors** $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ **et** $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0$.

D'où l'écriture trigonométrique de z_1 est

$$z_1=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Pour z_2 on a

$$z_2=m-i=e^{i\theta}-e^{i\frac{\pi}{2}}=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

Puis que $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ **alors** $\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0$ **et par la suite**

l'écriture trigonométrique de z_2 est

$$z_2=2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Exercice 5 : (20 points)

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1) Calculer les dérivées première, seconde et troisième de f .

2) Détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n de f en fonction de n.

Corrigé

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1) La fonction f est infiniment dérivable sur son $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

Sa dérivée première est $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$,

Sa dérivée seconde est $f''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}$

Sa dérivée troisième est $f'''(x)=\dfrac{-18}{(x-1)^4}$

2) Détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n de f en fonction de n.

On remarque que $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}=\dfrac{(-1)^1\times3\times1!}{(x-1)^{1+1}}$ **;**

$f''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}=\dfrac{(-1)^2\times3\times2!}{(x-1)^{2+1}}$ **et que**

$f'''(x)=\dfrac{-18}{(x-1)^4}=\dfrac{(-1)^3\times3\times3!}{(x-1)^{3+1}}$

Montrons donc par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$**,**

$f^{(n)}(x)=\dfrac{3\times(-1)^n\times n!}{(x-1)^{n+1}}$**.**

Elle est donc vraie pour $n\in\{1,2,3\}$**. Supposons qu'elle est vraie pour une valeur p de n c'est-à-dire que** $f^{(p)}(x)=\dfrac{3\times(-1)^p\times p!}{(x-1)^{p+1}}$**. On sait que** $f^{(p+1)}(x)=\left(f^{(p)}(x)\right)'$ **d'où**

$f^{(p+1)}(x)=-(p+1)\dfrac{3\times(-1)^p\times p!}{(x-1)^{p+2}}=\dfrac{3\times(-1)^{p+1}\times(p+1)!}{(x-1)^{p+2}}$**. Ce qui achève la démonstration et permet de conclure que pour tout** $n\in\mathbb{N}^*$**,** $\boxed{f^{(n)}(x)=\dfrac{3\times(-1)^n\times n!}{(x-1)^{n+1}}}$**.**

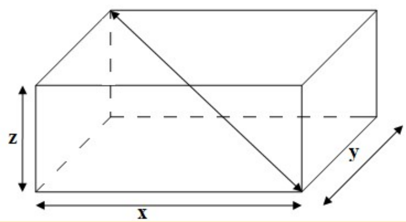
Corrigé du Sujet 8 1er tour 2017

Exercice 1 (4 points)

1) Vérifier que, pour tous réels x, y, z on a

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$

2) La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est $22 cm^2$ et la somme des longueurs de ses arêtes est $24 cm$.



Déterminer la longueur de ses diagonales intérieures.

Une solution

1) Vérifier que, pour tous réels x, y, z on a :

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$

$(x + y + z)^2 = (x + y + z)(x + y + z)$ **d'où**

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$

2) Déterminer la longueur de ses diagonales intérieures

- La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est $22 cm^2$ d'où $22 = 2xy + 2xz + 2yz$. Donc $xy + xz + yz = 11$

- La somme des longueurs de ses arêtes est $24 cm$ d'où

$4x + 4y + 4Z = 24$ **donc** $x + y + z = 6$ **.**

La longueur d'une diagonale intérieure est telle que :

$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **(utilisation du théorème de Pythagore). Or d'après la question 1) on a :**

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ **d'où** $6^2 = L^2 + 2 \times 11$ **donc** $L = \sqrt{14}$

Exercice 2 (4 points)

Soient α **et** β **deux réels.**

1) Développer, réduire et factoriser l'expression $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2$.

2) Soient x, y **et** z **des entiers naturels. Le triplet** (x,y,z) **est pythagoricien si** $x^2 + y^2 = z^2$.

Utiliser 1) pour donner trois exemples (non proportionnels) de triplets pythagoriciens.

Une solution

1) Développer, réduire et factoriser l'expression $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2$.

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 4\alpha^2\beta^2$$
$$= \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

Donc $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$

2) Soient x, y et z des entiers naturels. Le triplet (x,y,z) est pythagoricien si $x^2+y^2=z^2$.

Utiliser 1) pour donner trois exemples (non proportionnels) de triplets pythagoriciens.

On pose $x=\left|\alpha^2-\beta^2\right|$, $y=2\alpha\beta$ **et** $z=\alpha^2+\beta^2$

Pour $\alpha=2$ **et** $\beta=1$ **on trouve :** $x=3$, $y=4$ **et** $z=5$

Pour $\alpha=3$ **et** $\beta=2$ **on trouve :** $x=5$, $y=12$ **et** $z=13$

Pour $\alpha=4$ **et** $\beta=1$ **on trouve :** $x=15$, $y=8$ **et** $z=17$

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère le point $A(-1+i)$ et la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'affixes z_n définie par : $z_0=0$ et $z_{n+1}=\frac{1}{2}(1+i)z_n+i$.

1) Montrer que le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle isocèle pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Montrer que les points M_n restent sur quatre droites fixes. Sur quelle droite se trouve le point M_{2017} ?

3) On pose : $L_n=M_0M_1+M_1M_2+\cdots+M_{n-1}M_n$. Calculer L_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n$.

Une solution

1) On a $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}-z_A}=\dfrac{\frac{1+i}{2}z_n+i-z_n}{\frac{1+i}{2}z_n+i+1-i}=\dfrac{(-1+i)z_n+i}{(1+i)z_n+1}=i$. On a donc

$$\begin{cases} AM_{n+1}=M_nM_{n+1} \\ \left(\overrightarrow{M_{n+1}A},\overrightarrow{M_{n+1}M_n}\right)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle isocèle en M_{n+1} .

2) On a l'angle $\left(\overrightarrow{AM_n},\overrightarrow{AM_{n+1}}\right)=\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ par suite l'angle

$\left(\overrightarrow{AM_p},\overrightarrow{AM_{p+4}}\right)=\pi\ [2\pi]$ pour $p\in\mathbb{N}$. On en déduit que M_n reste

sur l'une des quatre droites (AM_0) ou (AM_1) ou (AM_2) ou (AM_3) .

Remarquons que $2017=4\times 504+1$ et donc $M_{2017}\in(AM_1)$.

3) Remarquons que $z_A=\dfrac{1}{2}(1+i)z_A+i$ et par suite

$z_{n+1}-z_A=\dfrac{1}{2}(1+i)(z_n-z_A)$. Alors $AM_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}AM_n$ .Mais

d'après1) $AM_{n+1}=M_nM_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}AM_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}M_{n-1}M_n$. On pose

$d_n=M_nM_{n+1}$ alors la suite (d_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et

de premier terme $d_0=M_0M_1=1$.

On trouve que

$$L_n = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = \left(2+\sqrt{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$$ D-où

$\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 2+\sqrt{2}$.

Exercice 4 (4 points)

1) Soit $PQRS$ un trapèze de bases [PS] et [QR] dont les diagonales se coupent en E . Montrer que les triangles PQE et RSE sont de même aire.

2) Soit ABC un triangle acutangle (à angles aigus). La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe [BC] en L et recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en N . Les projetés orthogonaux de L sur(AB) et sur (AC) sont notés respectivement F et D . La parallèle à(NC)menée de D coupe (BC) en I.

a) Montrer que (FI) est parallèle à(BN).

b) Montrer que le triangle ABC et le quadrilatère $AFND$ sont de même aire.

Une solution

1) On a $d\left(P;(QR)\right)=d\left(S;(QR)\right)$ $d\left(\left(P;(QR)\right)=d\left((S;(QR)\right)\right.$ **car**

$\left(PS\right)\|\left(QR\right)$**, donc les triangles** PQR **et** QRS **sont de même aire.**

On a

$\text{aire}(PQR)=\text{aire}(PQE)+\text{aire}(QER)=\text{aire}(RSE)+\text{aire}(QER)=\text{aire}(QRS)$

d'où $\text{aire}(PQE)=\text{aire}(RSE)$.

2.a) Montrer que $\left(FI\right)$ **est parallèle à** $\left(BN\right)$.

Les points A, F, L **et** D **sont cocycliques (triangles rectangles de même hypoténuse.**

Montrons que I **est sur le cercle passant par les points** A, F, L **et** D.

On a : $(\overrightarrow{IL};\overrightarrow{ID})=(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CN})$ **(alignement et parallélisme) d'où**

$(\overrightarrow{IL};\overrightarrow{ID})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN})$ **(cocyclicité) donc** $(\overrightarrow{IL};\overrightarrow{ID})=(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AC})$

(bissectrice) on en déduit que $(\overrightarrow{IL};\overrightarrow{ID})=(\overrightarrow{AL};\overrightarrow{AD})$**, le point est bien sue le cercle circonscrit au triangle** ADL.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{FI};\overrightarrow{BN})&=(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{IL})+(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BN})\\&=(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AL})+(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AN})\\&=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN})+(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AN})\\&=0\end{aligned}$$

car (AN) **est la bissectrice de** $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

b) Montrer que le triangle ABC et le quadrilatère AFND sont de même aire.

On note $\{E_1\} = (CI) \cap (DN)$ **et** $\{E_2\} = (FN) \cap (BI)$

La partie AFE_2E_1D **est commune au triangle** ABC **et au quadrilatère** $AFND$**. Dans les trapèzes** $DINC$ **et** $FBNI$ **on a d'après la question 1) que les triangles** FBE_1 **et** INE_2 **d'une part et que les triangles** FBE_1 **et** INE_2 **d'une part** INE_1 **et** DCE_1 **d'autre part sont de même aire. Donc le triangle ABC et le quadrilatère AFND sont de même aire.**

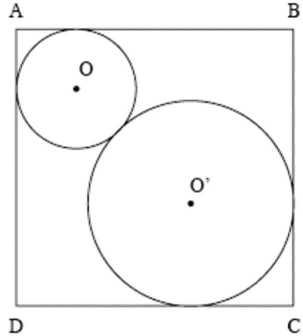
Exercice 5 (4 points)

Soit $ABCD$ **un carré de coté** a**.**

Un cercle Γ **intérieur au carré est tangent à** (AB) **et** (AD)**. Un second cercle** Γ'**, intérieur au carré, est tangent extérieurement à** Γ **ainsi qu'aux droites** (CB) **et** (CD)**.**

Soit S **la somme des aires des cercles** Γ **et** Γ' **: qu'elles sont les valeurs maximale et minimale de** S **?**

Corrigé



Les centres O et O' des cercles étant à égale distance des côtés (AB) et (AD) pour l'un et des côté (CB) et (CD) pour l'autre, les centres des deux cercles sont situés sur la diagonale (AC) et les rayons r et r' des cercles vérifient : $OA+r+r'+O'B=AC=a\sqrt{2}$ or $OA=r\sqrt{2}$ et $O'C=r'\sqrt{2}$ en remplaçant on trouve :

$$(r+r')(1+\sqrt{2})=a\sqrt{2} \text{ d'où } r+r'=a(2-\sqrt{2})$$

Les cercles étant situés à l'intérieur d'un carré de coté a, leurs rayons restent inférieurs à $\frac{a}{2}$. On en déduit que chaque rayon appartient à l'intervalle $\left[a(\frac{3}{2}-\sqrt{2});\frac{a}{2}\right]$.La somme des aires des deux cercles est : $S=\pi(r+r')$

$$S=\pi(r^2+r'^2)=\frac{\pi}{2}((r+r')^2+(r-r')^2)=\frac{\pi}{2}(a^2(6-4\sqrt{2})+(r-r')^2)\,.$$

On en déduit immédiatement que cette aire est minimale

lorsque $r=r'=\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})=a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ **on a alors** $S_{min}=\pi(3-2\sqrt{2})a^2$ **.**

Et qu'elle est maximale quand r **est maximal et** r' **minimal (ou inversement) c'est-à-dire quand :**

$$r=\frac{a}{2} \text{ et } r'=a(\frac{3}{2}-\sqrt{2})$$

on a donc $S_{max}=\frac{\pi}{2}(a^2(6-4\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})^2a^2)$

d'où $S_{max}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{9}{2}-3\sqrt{2}\right]a^2$ **.**

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS

Contrôle continu 4AS

Contrôle continu 7D

Contrôle continu 7C

Rallyes de Maths 3ème

Rallyes de Maths 5ème

Rallyes de Maths 6ème

Olympiades de Maths 4ème

Olympiades de Maths 7ème

Jeux mathématiques* et *logiques

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS

Contrôle continu 4AS

Contrôle continu 7D

Contrôle continu 7C

Rallyes de Maths 3ème

Rallyes de Maths 5ème

Rallyes de Maths 6ème

Olympiades de Maths 4ème

Olympiades de Maths 7ème

Jeux mathématiques et logiques