Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

أصدقاء الرياضيات
AMIMATHS
موريتانيا

Olympiades Nationales de Mathématiques

2017 à 2024

7C

Tome 3

Horma Hamoud - Mahfoudh Mohamed Ammou

Dah Mohamed Boubacar - Isselmou Farajou

أصدقاء الرياضيات
AMIMATHS
موريتانيا

Olympiades Nationales de

Mathématiques

2017 à 2024

$7^{\text{ème}}$ C

Tome 3

Horma Hamoud Mahfoudh Mohamed Ammou

Dah Mohamed Boubacar Iselmou Farajou

Si vous décelez une erreur, nous vous remercions par avance de nous en faire part :

e-mail : aamimaths@gmail.com

L'équipe Rallyes et Olympiades – AMIMATHS

Sommaire

مقدمة

يسر جمعية أصدقاء الرياضيات أن تضع بين يدي مجتمع المهتمين بالرياضيات في موريتانيا هذا الكتاب ضمن السلسلة الأولى من إصداراتها في مجال مسابقات رالي وأولمبياد الرياضيات الوطني.

الكتاب عبارة عن جمع مواضيع مادة الرياضيات في الأولمبياد الوطني للرياضيات لمستوى السنة السابعة رياضيات من سنة 2017 إلى سنة 2024، مع حلولها التفصيلية بمنهجية تربوية علمية تساهم في تنمية مواهب التلاميذ وتساعدهم في التحضير لهذا النوع من المسابقات وطنيا وإقليميا ودوليا. كما يضع تحت تصرف الأساتذة بنكا من التمارين غير التقليدية، مما يساعد في اكتشاف التلاميذ الموهوبين وتحسين عملية التعليم والتدريب.

تم إصدار هذا الكتاب في ثلاثة أجزاء، يعالج كل جزء منها مواضيع أحد الأدوار الثلاثة للأولمبياد الوطني للرياضيات وذلك لمراعاة التدرج في مستوى صعوبة المسائل.

ويأتي إنتاج ونشر هذا الكتاب ضمن أنشطة جمعية أصدقاء الرياضيات ـ بالتعاون مع وزارة التهذيب الوطني وإصلاح النظام التعليمي ـ الرامية إلى الرفع من مكتسبات التلاميذ في مادة الرياضيات، وتحسين جودة التعليم ووفرته وصولا إلى الرفع من نسب النجاح في الامتحانات الوطنية وكذا في المسابقات الإقليمية والدولية؛

كما يأتي ذلك في الوقت الذي يلاحظ فيه عزوف مستمر عن مادة الرياضيات أدى إلى تدهور في أعداد المنتسبين إلى شعبة الرياضيات، الشيء الذي سينتج عنه حتما ـ حاضرا ومستقبلا ـ نقص حاد في المهندسين والكوادر العلمية المؤهلة وفي الأساتذة الأكفاء القادرين على تدريس مواد الرياضيات والعلوم الفيزيائية لأجيالنا الصاعدة، مما يؤخر عجلة التنمية والتقدم إذ لا يمكن لأي بلد النهوض بدون الرياضيات لكونها مفتاحا للعلوم الأخرى ووسيلة لاكتسابها وتملكها.

وفي هــذا الســياق فــإن جمعيــة أصــدقاء الرياضــيات تشــكر جــزيلا اللجنــة الوطنيــة للرياضـيات والعلـوم (برنـامج مواهـب) علـى التعـاون المثمـر والمسـاهمة في توسـيع دائـرة الاهتمـام بمـادة الرياضـيات وجعلهـا مـادة جاذبـة ومشـوقة، كمـا تـثمن عاليـا جهـود كافـة مفتشــي وأســاتذة الرياضــيات الــذين ســاهموا مــن قريــب أو بعيــد في إنجــاز هــذا العمــل، وتعـول علـى مـا لـديهم مـن ملاحظـات واقتراحـات قـد تسـاعد في تنقـيح وتحسـين جـودة هذا الكتاب التجريبي الذي يتم إصداره في بلادنا بهذا الشكل والحجم لأول مرة.

والله ولي التوفيق.

PREFACE

Dans le cadre de la première série de ses publications en matière de compétitions du Rallye et de l'Olympiade Nationale de Mathématiques, l'Association des Amis des Mathématiques (AMIMATHS) est heureuse de mettre cet ouvrage entre les mains de la communauté mathématique de Mauritanie.

Regroupant des sujets de mathématiques des olympiades de 7^{e} année de 2017 à 2024, cet ouvrage propose des solutions détaillées et utilise des méthodologies scientifiques contribuant au développement des talents des élèves tout en les préparant à ce type de compétitions tant au niveau national qu'au niveau régional et international. En outre, ce manuel met à la disposition des enseignants une banque d'exercices non conventionnels leur permettant d'identifier des apprenants doués et contribuant ainsi à améliorer le processus de l'enseignement/apprentissage.

Cet ouvrage est publié en trois tomes, chacun traitant les sujets de l'une des trois phases de l'Olympiade nationale de mathématiques, afin de garantir un niveau de difficulté graduel des problèmes.

La production et la publication de ce livre font partie des activités d'AMIMATHS en coopération avec le Ministère de l'Éducation Nationale et de la Réforme du Système Éducatif visant à rehausser le niveau des acquis des élèves en mathématiques et à améliorer la qualité et l'offre de l'enseignement afin d'augmenter le taux de réussite aux examens nationaux ainsi qu'aux concours régionaux et internationaux.

Cela survient également à un moment où notre pays connait une réticence envers l'enseignement/ apprentissage des mathématiques, réticence qui a conduit à une diminution grave du nombre d'élèves inscrits en série mathématiques. Cette situation déplorable entraînera, sans doute, dans le présent et le futur, un manque criant d'ingénieurs, de personnel scientifique qualifié et de professeurs compétents capables d'enseigner les mathématiques et les sciences physiques à nos prochaines générations. Ce qui retarde la roue du développement et du progrès de notre pays. En effet, aucun pays ne peut progresser sans les mathématiques qui sont la clé des autres sciences et un moyen de leur acquisition.

Dans ce contexte, l'Association AMIMATHS remercie vivement la commission Nationale pour les Mathématiques et les Sciences (Programme Mawaheb) pour sa coopération fructueuse et sa contribution à l'élargissement du cercle d'intérêt pour les mathématiques. Cet intérêt en a fait une matière attractive et passionnante. L'Association remercie également tous les inspecteurs et professeurs de mathématiques qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail. Elle compte également sur les commentaires et suggestions pour contribuer à améliorer la qualité de cet ouvrage expérimental, qui est édité, dans ce format, pour la première fois dans notre pays.

ENONCES DES SUJETS

du troisième tour des olympiades nationales de Mathématiques de 2017 à 2024

Niveau 7ème Mathématiques

Exercice 1 (25 points)

Soit f la fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : pour tous réels x différent de 0 et 1, on a

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=(2x-1)^2+f\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Trouver l'expression de $f(x)$.

Exercice 2 (25 points)

ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et M celui de $[AI]$.

On place sur $[AB]$ le point D tel que $\angle MDI=\angle ACB$ et $AD>BD$.

De même on place sur $[AC]$ le point E tel que $\angle MEI=\angle ABC$ et $AE>XE$.

Montrer que les points B, C, D et E sont cocycliques.

Exercice 3 (25 points)

Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs tels que

$$a+b+c+d=16 \text{ et } \frac{abc+2}{a+2}=\frac{bcd+2}{b+2}=\frac{cda+2}{c+2}=\frac{dab+2}{d+2}$$

1° Vérifier que $da^2b+2dab+2a=abcd+2abc+2d$ et en déduire la valeur de $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$

2° Déterminer l'ensemble des valeurs possibles des nombres a, b, c et d.

Exercice 4 (25 points)

Déterminer tous les entiers naturels non nuls n, p et q tels que :

$$n^2=2^p+21^q$$

Sujet 2 **$3^{ème}$ tour** **Session 2023**

<u>Exercice 1 (20 points)</u>

La police a interrogé quatre personnes témoins d'un vol commis par un homme dans un magasin. Voici leurs déclarations concernant la description du voleur :

L'agent de sécurité : "Il était grand, portait une chemise blanche, un pantalon noir avec un bracelet."

Le gérant : "Il était grand, portait une chemise verte, un pantalon rouge avec un bracelet."

Le caissier : "Il était grand, portait une chemise rouge, un pantalon vert sans bracelet."

Le client : "Il était petit, portait une chemise verte, un pantalon noir avec un bracelet."

Peu de temps après, le voleur est arrêté. Les policiers se rendent compte alors que chaque témoin a donné un renseignement exact, mais un seul.

Peux-tu maintenant trouver les informations exactes ?

<u>Exercice 2 (20 points)</u>

Soient a, b, c, d des réels strictement positifs tels que

$a + b + c + d = 4$.

Montrer que $\dfrac{bcd}{(4-a)^2} + \dfrac{acd}{(4-b)^2} + \dfrac{abd}{(4-c)^2} + \dfrac{abc}{(4-c)^2} \leq \dfrac{4}{9}$ **et**

déterminer les cas d'égalité.

Exercice 3 (20 points)

Soit Γ_1 un cercle tangent intérieurement à un cercle Γ_2 en un point A. Soit P un point de Γ_2 distinct de A. Les points B et C sont les points de contact de Γ_1 avec ses tangentes issues du point P. Les droites (PB) et (PC) recoupent le cercle Γ_2 ; respectivement en deux points Q et R.

1) Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{BAC}$.
2) La droite (BC) coupe le cercle Γ_2 en deux points E et F. Montrer que si le triangle PEF est isocèle en P, alors les points B, C , Q et R sont cocycliques.

Exercice 4 (20 points)

Trouver tous les réels x, y, z et t tels que :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ xy + xz + xt + yz + yt + zt = 54 \end{cases}$$

Exercice 5 (20 points)

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $2x^2y - 122x^2 - 33y = 2023$.

Sujet 3 **$3^{ème}$ tour** **Session 2022**

Exercice 1: (20 points)

Soient a et b deux entiers naturels.

1° Factoriser l'expression $a^4 + 4b^4$.

2° En déduire que, pour tout nombre premier $n > 5$, l'entier $n - 4$ n'est pas une puissance quatrième d'un entier.

Exercice 2: (20 points)

Soit ABCD un trapèze, avec $(AB) \parallel (CD)$ et $AB > CD$, tel qu'il existe un cercle Γ_1 de centre O à l'intérieur du trapèze et tangent à ses quatre côtés. Le cercle Γ_2, inscrit dans le triangle ABC , est tangent aux côtés $[AB]$ et $[AC]$ en M et N respectivement. On note I le centre de Γ_2.

1° Montrer que les points C, N, O et I sont cocycliques.

2° Montrer que les points O, M et N sont alignés.

Exercice 3: (20 points)

Pour tout entiers naturels n et p avec $n \geq 1$ on pose

$$I_{n,p} = \int_0^n t^p \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \text{ et } J_{n,p} = \int_0^1 x^p (1-x)^n \, dx .$$

1° Trouver une relation entre $I_{n,p}$ et $J_{n,p}$.

2° Trouver une relation entre $J_{n,p}$ et $J_{n-1,p+1}$.

3° En déduire les expressions de $J_{n,p}$ et $I_{n,p}$ en fonction de n et p.

4° Donner l'expression de $I_{n,n}$, en fonction de n, et calculer $\lim_{n\to+\infty} I_{n,n}$

Exercice 4: (20 points)

Déterminer tous les triplets de réels positifs (x,y,z) solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y = (z-1)^2 \\ y^2 - z = (x-1)^2 \\ z^2 - x = (y-1)^2 \end{cases}$$

Exercice 5: (20 points)

Déterminer toutes les fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que,

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : \quad f(x^2 - y^2) = (x-y)(f(x)+f(y)).$$

Sujet 4 **$3^{ème}$ tour** **Session 2021**

Exercice 1: (20 points)

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $3^{n^2} > (n!)^4$.

Exercice 2 : (20 points)

Soit a et b deux entiers naturels.

1) Montrer que pour tout a, le nombre $a(a^4 - 1)$ est divisible par 3.

2) Trouver – s'ils existent- tous les couples (a,b) vérifiant la condition suivante :

« $a^4 + 1$ et $b^2 - 1$ ne sont pas divisibles par 39, mais le produit $(a^4 + 1)(b^2 - 1)$ est divisible par 39 ».

Exercice 3 : (20 points)

L'objectif est de déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x} dx$.

1) On pose $g(x) = \tan x$ avec $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $(g^{-1})'(x)$.

2) En posant $z = g(\frac{x}{2})$, vérifier que $I = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{g^{-1}(z)}{z} dz$.

3) Calculer l'intégrale $J = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln z}{z^2 + 1} dz$.

4) Déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x} dx$.

Exercice 4 : (20 points)

On construit à l'extérieur d'un triangle ABC direct, trois triangles équilatéraux ABC', BCA' **et** CAB'. **Leurs centres sont nommés respectivement** O_1, O_2 **et** O_3.

1) Montrer que $AA' = BB' = CC'$.

2) Montrer que le triangle $O_1O_2O_3$ **est équilatéral et que son centre de gravité G est celui du triangle ABC.**

3) On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ **et** $d = O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$.

Soit s l'aire du triangle ABC.

Exprimer d en fonction de a,b,c et s.

Exercice 5 : (20 points)

On se propose de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **telles que pour tous x, y dans** $\mathbb{R}$ **:**

$$f\left(f(x) + 2f(y)\right) = f(2x) + 8y + 42.$$

1) Montrer que pour tous u, v dans $\mathbb{R}$ **: si** $f(u) = f(v)$, **alors** $u = v$.

2) Trouver toutes les fonctions solutions du problème.

Sujet 5 **$3^{ème}$ tour** **Session 2020**

<u>Exercice 1</u>: (20 points)

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $3^{n^2} > (n!)^4$.

<u>Exercice 2</u> : (20 points)

Soit a et b deux entiers naturels.

1) Montrer que pour tout a, le nombre $a(a^4 - 1)$ est divisible par 3.

2) Trouver – s'ils existent- tous les couples (a,b) vérifiant la condition suivante :

« $a^4 + 1$ et $b^2 - 1$ ne sont pas divisibles par 39, mais le produit $(a^4 + 1)(b^2 - 1)$ est divisible par 39 ».

<u>Exercice 3</u> : (20 points)

L'objectif est de déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x} dx$$

1) On pose $g(x) = \tan x$ avec $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $(g^{-1})'(x)$.

2) En posant $z = g(\frac{x}{2})$, vérifier que $I = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{g^{-1}(z)}{z} dz$.

3) Calculer l'intégrale $J=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\ln z}{z^2+1}dz$.

4) Déterminer la valeur de l'intégrale $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x}{\sin x}dx$.

Exercice 4 : (20 points)

On construit à l'extérieur d'un triangle ABC direct, trois triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB'. Leurs centres sont nommés respectivement O_1, O_2 et O_3.

1) Montrer que $AA'=BB'=CC'$.

2) Montrer que le triangle $O_1O_2O_3$ est équilatéral et que son centre de gravité G est celui du triangle ABC.

3) On pose $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ et $d=O_1O_2=O_2O_3=O_3O_1$.

Soit s l'aire du triangle ABC.

Exprimer d en fonction de a,b,c et s.

Exercice 5 : (20 points)

On se propose de trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$:

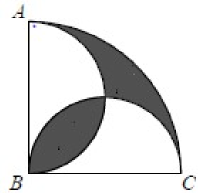
$$f\big(f(x)+2f(y)\big)=f(2x)+8y+42.$$

1) Montrer que pour tous u, v dans $\mathbb{R}$: si $f(u)=f(v)$, alors $u=v$.

2) Trouver toutes les fonctions solutions du problème.

Sujet 6 $3^{ème}$ tour Session 2019

Exercice 1: (20 points)



Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle avec $BA = BC = a$.

Calculer l'aire grisée.

Exercice 2 : (20 points)

Soit un entier $n \geq 2$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$; le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est impair et non premier.

2) Si $n = 3$, déterminez toutes les valeurs entières de m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.

3) Montrez que pour n'importe quel entier n, il y a toujours un nombre fini de valeurs entières m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.

Exercice 3 : (20 points)

L'objectif est de déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x \cos x}} dx$$

1) On pose $g(x)=\sin x$ avec $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $(g^{-1})'(x)$.

2) En posant $x=\frac{\pi}{4}+y$, vérifier que $I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos y}{\sqrt{2+\cos(2y)}}dy$

3) En posant $z=\sin y$, montrer que $I=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dz}{\sqrt{3-2z^2}}$

4) Exprimer alors la valeur de I en utilisant g^{-1} .

<u>Exercice 4 : (20 points)</u>

Soit f la fonction définie par $f(t)=\frac{t-1}{t\ln t}$ si $t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$ et $f(1)=1$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ puis justifier l'existence de l'intégrale $\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$ pour $x\in\mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$.

2) Utiliser $\int_x^{x^2}f(t)dt$ pour calculer $\lim_{x\to1}\left(\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt\right)$.

Exercice 5: (20 points)

ABC est un triangle d'angles aigus et dont les hauteurs $[AD]$ et $[BE]$ se coupent en H. Soit M le milieu de $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles DEM et ABH se coupent en P et Q où P est le point situé dans le demi-plan délimité par (CH) contenant A. On désigne par R le point d'intersection de (ED) et (PH) .

1) Montrer que $\widehat{RDA} = \widehat{RPA}$ puis déduire que les points B, P, R et E sont cocycliques.

2) Montrer que R appartient au cercle circonscrit au triangle ABC

3) Montrer que les droites (ED), (PH) et (MQ) sont concourantes en R.

Exercice 1 (20 points)

1° Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[$ **on a :** $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2° En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $\prod_{k=2}^{n} \ln k < \dfrac{\sqrt{n!}}{n}$

Exercice 2 (20 points)

On considère l'équation : $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ **où** (x, y) **sont des entiers relatifs.**

1° Donner une solution particulière de cette équation.

2° Montrer que si $x \neq 0$ **alors** $x \geq 3$ **et** $y = 2^{x-1} \times m + n$ **(avec** m **impair et** $n = 1$ **ou** $n = -1$ **) .**

3° Déterminer tous les couples (x, y) **d'entiers relatifs qui vérifient l'équation :** $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ **.**

Exercice 3 (20 points)

On considère l'intégrale : $\varphi(x) = -\int_0^x \ln(\cos y)\,dy$ **, pour** $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

1° Montrer que : $\varphi(x) = 2\varphi\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) - x\ln 2$ **.**

2° En prolongeant φ par continuité en $\frac{\pi}{2}$ trouer alors la valeur exacte de $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 4 (20 points)

Un octogone convexe $A_1A_2A_3...A_8$ est inscrit dans un cercle de rayon non nul. $A_1A_3A_5A_7$ est un carré d'aire égale à 5 ; $A_2A_4A_6A_8$ est un rectangle d'aire égale à 4. Déterminer, en justifiant, l'aire maximale de l'octogone.

Exercice 5 (20 points)

Trouver l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système :

$$\begin{cases} x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 = 8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 = 8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

Sujet 8 $\quad 3^{ème}$ tour $\quad$ Session 2017

Exercice 1 (4 points)

Soit ABC un triangle acutangle (à angles aigus) tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et H son orthocentre. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par D le symétrique de H par rapport à I. Montrer que $AD = BC$.

Exercice 2 (4 points) :

Un commerçant effectue trois remises successives sur un boubou dont le prix initial était de 30000 Ouguiyas et le vend finalement à 22287 Ouguiyas. Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de valeurs entières distinctes ? On donne : $742900 = 17 \times 19 \times 23 \times 2^2 \times 5^2$

Exercice 3 (4 points)

Etant donné un triangle ABC rectangle en A, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On veut construire deux carrés inscrits dans ce triangle : Le premier ayant A pour sommet et le second ayant un côté porté par l'hypoténuse.

1) Construire les deux cas de figure en expliquant les étapes de la construction.

2) Exprimer les côtés x et y de ces deux carrés en fonction de b et c puis comparer leurs aires.

Exercice 4 (4 points)

Un nombre palindrome est un nombre entier non nul qui peut se lire de la même manière dans les deux sens (par exemple : 12321). Si les nombres palindromes sont rangés dans l'ordre croissant, le premier de ces nombres est 1 alors que 55 porte le numéro 14. On dit aussi que 55 est le 14$^{\text{ième}}$ nombre palindrome.

1) Quel est le 5$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?

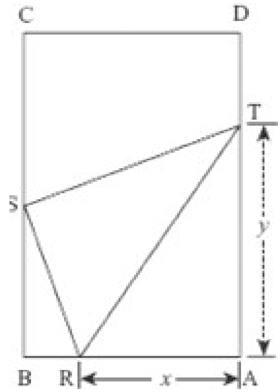
2) Quel est le 20$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?

3) Donner le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres, puis celui du dernier nombre palindrome à 3 chiffres.

4) Un jeune mathématicien, spécialiste des nombres palindromes, protège les résultats de ses recherches dans un coffre-fort dont la combinaison comporte quatre chiffres. Pour se souvenir de la combinaison d'ouverture du coffre, le chercheur, âgé de 22 ans, utilise le seul nombre palindrome dont le quotient par son rang dans la liste des nombres palindromes est l'âge du mathématicien.

Quelle peut bien être la combinaison choisie par ce spécialiste?

Exercice 5 (4 points)



Soit ABCD une feuille rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$. Soit R un point de [AB] (bord inférieur de la feuille) et T un point de [AD] (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment [RT] et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir la figure ci-contre : Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment [BC] (bord gauche de la feuille). On pose $AR = x$ et $AT = y$ ..

1) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.

2) Trouver une relation entre x et y quand S se déplace sur [BC].

3) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle SRT est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST?

CORRIGE DES SUJETS

du troisième tour des olympiades nationales de Mathématiques de 2017 à 2024

Niveau 7ème Mathématiques

Corrigé du sujet 1 **$3^{\text{ème}}$ tour** **Session 2024**

<u>Exercice</u> 1 (25 points)

Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs tels que

$$a+b+c+d=16 \text{ et } \frac{abc+2}{a+2}=\frac{bcd+2}{b+2}=\frac{cda+2}{c+2}=\frac{dab+2}{d+2}$$

1° Vérifier que $da^2b+2dab+2a=abcd+2abc+2d$ et en déduire la valeur de $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$

2° Déterminer l'ensemble des valeurs possibles des nombres a, b, c et d.

Corrigé

1° $\frac{abc+2}{a+2}=\frac{dab+2}{d+2} \Leftrightarrow da^2b+2dab+2a+4=abcd+2abc+2d+4$

$\Leftrightarrow da^2b+2dab+2a=abcd+2abc+2d$

La symétrie de rôle permet la déduction de trois autres relations analogues. D'où le système

$$\begin{cases} da^2b + 2dab + 2a = abcd + 2abc + 2d \\ ab^2c + 2abc + 2b = abcd + 2bcd + 2a \\ bc^2d + 2bcd + 2c = abcd + 2bcd + 2b \\ cd^2a + 2cda + 2d = abcd + 2cda + 2c \end{cases}$$

La somme des quatre équations donne, après simplification des termes répétés dans les deux membres,

$da^2b + ab^2c + bc^2d + cd^2a = 4abcd$ **qui est équivalent à**

$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = 4$.

2° Selon IAG $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \geq 4$ **et il y a égalité si et seulement si**

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.

D'où $a^2 = c^2$ **et** $b^2 = d^2$ **autrement dit** $a = c$ **et** $b = d$.

Par conséquent $da^2b + 2dab + 2a = abcd + 2abc + 2d$ **s'écrit**

$a^2b^2 + 2ab^2 + 2a = a^2b^2 + 2a^2b + 2b \Leftrightarrow (ab-1)(a-b) = 0$

D'où $a = b$ **ou** $ab = 1$

1^er^ cas si $a = b$ **alors on a** $a = b = c = d = 4$ **on a donc**

$(a,b,c,d) = (4,4,4,4)$

2^e^ cas si $ab = 1$ **alors la relation** $a + b + c + d = 16$ **s'écrit** $a + \frac{1}{a} = 8$

ce qui donne $a^2 - 8a + 1 = 0$

dont $\Delta' = 15$ **d'où** $a = 4 + \sqrt{15}$ **ou** $a = 4 - \sqrt{15}$

- $a = 4+\sqrt{15} \Rightarrow b = \dfrac{1}{4+\sqrt{15}} = 4-\sqrt{15}$ alors on a

  $(a,b,c,d) = \left(4+\sqrt{15}, 4-\sqrt{15}, 4+\sqrt{15}, 4-\sqrt{15}\right)$

- $a = 4-\sqrt{15} \Rightarrow b = \dfrac{1}{4-\sqrt{15}} = 4+\sqrt{15}$ alors on a

  $(a,b,c,d) = \left(4-\sqrt{15}, 4+\sqrt{15}, 4-\sqrt{15}, 4+\sqrt{15}\right)$

Alors il existe trois quadruplets (a,b,c,d) solutions :

$(4,4,4,4);\left(4+\sqrt{15},4-\sqrt{15},4+\sqrt{15},4-\sqrt{15}\right);\left(4-\sqrt{15},4+\sqrt{15},4-\sqrt{15},4+\sqrt{15}\right)$

<u>Exercice</u> 2 (25 points)

ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et M celui de $[AI]$.

On place sur $[AB]$ le point D tel que $\angle MDI = \angle ACB$ et $AD > BD$.

De même on place sur $[AC]$ le point E tel que $\angle MEI = \angle ABC$ et $AE > XE$.

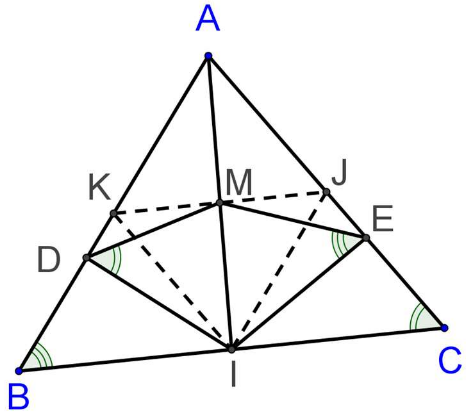
Montrer que les points B, C, D et E sont cocycliques.

Corrigé

Soient J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

$M \in (JK)$ **et** $(JK) \| (BC)$, $(KI) \| (CA)$ **et** $(IJ) \| (AB)$.

On a $\angle MDI = \angle ACB = \angle AJK = \angle MKI$ donc les points M, K, D et I sont cocycliques



De même $\angle MEI = \angle ABC = \angle AKJ = \angle MJI$ donc les points M, J, E et I sont cocycliques.

La puissance du point A par rapport à ces deux cercles donne $AK.AD = AM.AI = AJ.AE$ donc les points K, D, J et E sont cocycliques.

$\angle BDE = 180 - \angle KDE = \angle KJE = 180 - \angle KJA = 180 - \angle BCE$. Alors les points B, C, D et E sont cocycliques.

<u>Exercice</u> 3 (25 points)

Déterminer tous les entiers naturels non nuls n, p et q tels que :

$n^2 = 2^p + 21^q$

Corrigé

Discutons selon la parité de p

1er cas si p est impair, soit $p = 2k+1$ alors $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2[3]$ et $21^q \equiv 0[3]$ donc $n^2 \equiv 2[3]$ ce qui est impossible car le reste de la division euclidienne par 3 d'un carré parfait est soit 0, soit 1.

2e cas si p est pair, $p = 2k$ donc $21^q = n^2 - 2^{2k} = (n+2^k)(n-2^k)$

Soit d le pgcd des nombres $n+2^k$ et $n-2^k$ alors d divise 21^q donc il divise 21.

Supposons que l'un des nombres premiers 3 et 7 divise chacun des deux nombres $n+2^k$ et $n-2^k$ donc il divise $(n+2^k)+(n-2^k) = 2n$ alors il divise n. Par conséquent 3 ou 7 divisera $n^2 - 21^q$ ce qui signifie qu'il divisera 2^p qui est impossible. Alors $d = 1$.

Par conséquent $21^q = (n+2^k)(n-2^k)$ signifie que

$$\begin{cases} n - 2^k = 1 \\ n + 2^k = 21^q \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n - 2^k = 3^q \\ n + 2^k = 7^q \end{cases} \text{ (notons que } n - 2^k < n + 2^k \text{)}$$

- $\begin{cases} n-2^k=1 \\ n+2^k=21^q \end{cases} \Rightarrow 2^{n+1}=21^q-1 \Rightarrow 2^{n+1}\equiv 6[7]$ **ce qui est contradictoire car pour tout entier m, 2^m est congru soit à 1 ou 2 ou 4.**
- $\begin{cases} n-2^k=3^q \\ n+2^k=7^q \end{cases}$ **donc $n=2^k+3^q$ et $2^{k+1}=7^q-3^q$**
  - **Pour q=1 on a $k=1 \Rightarrow p=2$ et $n=5$. Donc** $\begin{cases} n=5 \\ p=2 \\ q=1 \end{cases}$
  - **Pour $q\geq 2$, le cas $k=1$ étant déjà traité on a donc $k\geq 2$, d'où 2^{k+1} est un multiple de 8, or $7^q-3^q\equiv 0[8]$ ne peut avoir lieu que si q est pair . Supposons que $q=2r$ alors on a**

    $2^{k+1}=7^{2r}-3^{2r}=(7^r+3^r)(7^r-3^r)$

    Or $7^r+3^r\equiv 2[4]$ en plus $7^r+3^r\geq 4$ alors il ne peut pas être une puissance de 2.

D'où la seule solution du problème est $\begin{cases} n=5 \\ p=2 \\ q=1 \end{cases}$

Exercice 4 (25 points)

Soit f la fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : pour tous réels x différent de 0 et 1, on a

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=(2x-1)^2+f\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Calculer $f(3)$.

Corrigé

D'après la définition de f n a

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)-f\left(1-\frac{1}{x}\right)=(2x-1)^2 \qquad (1).$$

En substituant x par $1-\frac{1}{x}$, la relation précédente s'écrit

$$f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)-f\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)=\left(2\left(1-\frac{1}{x}\right)-1\right)^2 \Rightarrow$$

$$f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f(x)-f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 \qquad (2)$$

La somme des relations (1) et (2) donne

$$2f(x)=(2x-1)^2+\left(1-\frac{2}{x}\right)^2.$$

D'où $2f(3)=5^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{226}{9}\Rightarrow \boxed{f(3)=\frac{113}{9}}$

Exercice 1

La police a interrogé quatre personnes témoins d'un vol commis par un homme dans un magasin. Voici leurs déclarations concernant la description du voleur :

L'agent de sécurité : "Il était grand, portait une chemise blanche, un pantalon noir avec un bracelet."

Le gérant : "Il était grand, portait une chemise verte, un pantalon rouge avec un bracelet."

Le caissier : "Il était grand, portait une chemise rouge, un pantalon vert sans bracelet."

Le client : "Il était petit, portait une chemise verte, un pantalon noir avec un bracelet."

Peu de temps après, le voleur est arrêté. Les policiers se rendent compte alors que chaque témoin a donné un renseignement exact, mais un seul.

Peux-tu maintenant trouver les informations exactes ?

Corrigé

Pour identifier le voleur la police a besoin de quatre caractéristiques différentes.

Chaque témoin a donné une seule caractéristique exacte.

Deux témoins différents ne peuvent pas donner une même caractéristique exacte.

Si non, on n'aura pas quatre caractéristiques différentes.

Toute caractéristique qui se répète est donc à éliminer.

Témoin	Taille	Couleur chemise	Couleur pantalon	Bracelet
Agent sécurité	Grand	Blanche	Noir	Avec
Gérant	Grand	Verte	Rouge	Avec
Caissier	Grand	Rouge	Vert	Sans
Client	Petit	Verte	Noir	Avec

Le voleur est de taille petite, ce qui élimine les trois autres caractéristiques données par le client :

Témoin	Taille	Couleur chemise	Couleur pantalon	Bracelet
Agent sécurité	~~Grand~~	Blanche	~~Noir~~	~~Avec~~
Gérant	~~Grand~~	~~Verte~~	Rouge	~~Avec~~
Caissier	~~Grand~~	Rouge	Vert	Sans
Client	Petit	~~Verte~~	~~Noir~~	~~Avec~~

la ligne de l'agent ne reste qu'une seule caractéristique « Chemise blanche ».

Dans celle du gérant ne reste qu'une seule caractéristique « Pantalon rouge ».

Dans la colonne « Bracelet » ne reste qu'une seule caractéristique « sans bracelet ». Alors on élimine la couleurs « vert » et « rouge » dans la ligne du caissier.

En conclusion : le voleur est petit, la chemise est blanche, le pantalon est rouge et le voleur est sans bracelet.

Témoin	Taille	Couleur chemise	Couleur pantalon	Bracelet
Agent sécurité		Blanche		
Gérant			Rouge	
Caissier		~~Rouge~~	~~Vert~~	Sans
Client	Petit			

Exercice 2

Soient a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $a+b+c+d=4$.

Montrer que $\dfrac{bcd}{(4-a)^2}+\dfrac{acd}{(4-b)^2}+\dfrac{abd}{(4-c)^2}+\dfrac{abc}{(4-d)^2} \le \dfrac{4}{9}$ **et déterminer les cas d'égalité.**

Corrigé

D'après l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique (MA-MG) $\sqrt[3]{bcd} \le \frac{b+c+d}{3} = \frac{4-a}{3}$ d'où

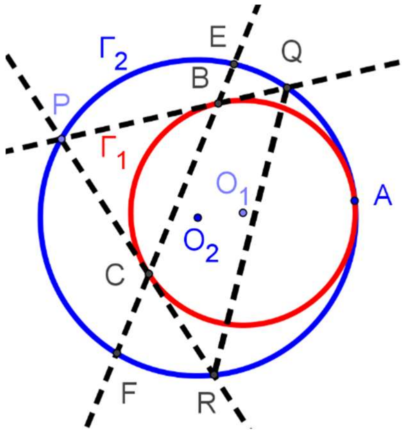
$bcd \le \left(\frac{4-a}{3}\right)^3$ et par conséquent $\frac{bcd}{(4-a)^2} \le \frac{4-a}{27}$.

Par analogie on a $\frac{acd}{(4-b)^2} \le \frac{4-b}{27}$

, $\frac{abd}{(4-c)^2} \le \frac{4-c}{27}$ et

$\frac{abc}{(4-d)^2} \le \frac{4-d}{27}$

Par addition



$$\frac{bcd}{(4-a)^2} + \frac{acd}{(4-b)^2} + \frac{abd}{(4-c)^2} + \frac{abc}{(4-d)^2} \le \frac{16-(a+b+c+d)}{27} = \frac{12}{27}$$

Donc $\frac{bcd}{(4-a)^2} + \frac{acd}{(4-b)^2} + \frac{abd}{(4-c)^2} + \frac{abc}{(4-d)^2} \le \frac{4}{9}$

$\sqrt[3]{bcd} = \frac{b+c+d}{3} \Leftrightarrow b = c = d$ donc il y a égalité si $a = b = c = d = 1$

Exercice 3

Soit Γ_1 un cercle tangent intérieurement à un cercle Γ_2 en un point A. Soit P un point de Γ_2 distinct de A. Les points B et C sont les points de contact de Γ_1 avec ses tangentes issues du

point P. Les droites (PB) et (PC) recoupent le cercle Γ_2 respectivement en deux points Q et R.

1) Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{BAC}$.

2) La droite (BC) coupe le cercle Γ_2 en deux points E et F.

Montrer que si le triangle PEF est isocèle en P, alors les points B, C , Q et R sont cocycliques.

Corrigé

1. Montrons que $\widehat{QAR} = 2\widehat{BAC}$

***Méthode 1*:**

$$\begin{aligned} \widehat{QAR} &= \widehat{QPR} && \text{cocyclicité de A, P, Q, R} \\ &= \widehat{QBC} + \widehat{BCR} && \text{alignement et R.Chales} \\ &= \widehat{BAC} + \widehat{BAC} && \text{Théorême de la tangente} \end{aligned}$$

D'où : $\widehat{QAR} = 2\widehat{BAC}$.

***Méthode 2* : Le triangle PBC est isocèle en P.**

$\left(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR}\right) = \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$ **cocyclicité de A, Q, P, R.**

$$\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) = \left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}\right) = \pi - 2\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}\right) = 2\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CP}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

(Théorème de la tangente)

2. Supposons que PEF est isocèle en P donc

$$\left(\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{EF}\right) = \left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FP}\right)$$

On a modulo π :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QR}) &= (\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QR}) && \text{Alignement de P, Q et B}\\
&= (\overrightarrow{EP},\overrightarrow{ER}) && \text{cocyclicité des points P, Q, R et E}\\
&= (\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF}) + (\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ER}) && \text{Relation de Chasles}\\
&= (\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FP}) + (\overrightarrow{PF},\overrightarrow{PR}) && \text{Hypothése + P, E, F et R cocycliques}\\
&= (\overrightarrow{FE},\overrightarrow{PR}) && \text{Relation de Chasles}\\
&= (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CR}) && \text{C,B,E, F alignés aussi C, P, R}
\end{aligned}$$

D'où la cocyclicité des points C, B, Q et R.

Exercice 4

Trouver tous les réels x, y, z et t tels que :

$$\begin{cases} x+y+z+t=12 \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=54 \end{cases}$$

Corrigé

Solution 1 :

Soit $S = xy + xz + xt + yz + +yt + zt$

$(x+y+z+t)^2 = 144$ **et** $(x+y+z+t)^2 = x^2+y^2+z^2+t^2+2S$

Donc $x^2+y^2+z^2+t^2 = 144-108 = 36$

On remarque que $(x+y+z+t)^2 = 4(x^2+y^2+z^2+t^2)$

alors d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz

$4(x^2+y^2+z^2+t^2) \geq (x+y+z+t)^2$

Le cas d'égalité est lorsque $x=y=z=t$ **d'où** $x=y=z=t=3$

Solution 2 **:**

Soit $S = xy + xz + xt + yz + +yt + zt$

$(x+y+z+t)^2=144$ et $(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2S$

Donc $x^2+y^2+z^2+t^2=144-108=36$

On remarque que

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2+(x-z)^2+(y-t)^2$$
$$=3\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)-2S$$

Alors

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2+(x-z)^2+(y-t)^2=3\times36-2\times54$$

D'où $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2+(x-z)^2+(y-t)^2=0$

Alors $x=y=z=t=3$

<u>Solution 3</u> **:**

Soit $S=xy+xz+xt+yz++yt+zt$

$(x+y+z+t)^2=144$ et $(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2S$

Donc $x^2+y^2+z^2+t^2=144-108=36$

On remarque que $\dfrac{x+y+z+t}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ **et**

$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{36}{4}}=3$ **.Donc** $\dfrac{x+y+z+t}{4}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4}}$

et cette égalité des moyennes arithmétique et quadratique (MA-MQ) est vérifiée si et seulement si $x=y=z=t$**. Alors**

$x=y=z=t=3$

<u>Solution 4</u> **: On suppose que x, y, z et t sont les racines d'un polynôme P de quatrième degré en X:**

$P(X)=\left(X-x\right)\left(X-y\right)\left(X-z\right)\left(X-t\right)$ **c-à-d**

$P(X)=X^4-12X^3+54X^2+dx+e$

Alors $P'(X)=4X^3-36X^2+108X+d$

$$P''(X)=12X^2-72X+108=12\left(X-3\right)^2$$

Donc $P(X) = (X-3)^4$ d'où le polynôme P a quatre racines égales $x = y = z = t = 3$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $2x^2y - 122x^2 - 33y = 2023$

Corrigé

$2x^2y - 122x^2 - 33y = 2023 \Leftrightarrow$

$2x^2(y-61) = 33y + 2023 \Leftrightarrow$

$2x^2(y-61) = 33(y-61) + 4036 \Leftrightarrow$

$(2x^2 - 33)(y-61) = 4036 = 4 \times 1009$

Les diviseurs de 4036 sont

$1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 4;\ -4;\ 1009;\ -1009;\ 2018;\ -2018;\ 4036$ et -4036.

Or $2x^2 - 33$ est impair alors ses valeurs possibles sont :

$1;\ -1;\ 1009;$ et -1009

$2x^2 - 33 = 1009 \Rightarrow x^2 = 521$ **impossible.**

$2x^2 - 33 = -1009 \Rightarrow x^2 = 488$ **impossible.**

$2x^2 - 33 = 1 \Rightarrow x^2 = 17$ **impossible.**

$2x^2 - 33 = -1 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$ **, dans ce cas**

$y - 61 = -4036 \Rightarrow y = -3975$

Donc l'équation a exactement deux couples solutions

$(4;-3975)$ et $(-4;-3975)$.

Exercice 1

Soient a et b deux entiers naturels.

1° Factoriser l'expression a^4+4b^4 .

2° En déduire que, pour tout nombre premier $n>5$, l'entier $n-4$ n'est pas une puissance quatrième d'un entier.

Corrigé

1° On a $\left(a^2+2b^2\right)^2=a^4+4b^4+4a^2b^2$ donc

$$a^4+4b^4=\left(a^2+2b^2\right)^2-(2ab)^2=\left(a^2+2b^2+2ab\right)\left(a^2+2b^2-2ab\right)$$

2° Soit n un nombre premier supérieur à 5. Supposons qu'il existe un entier naturel a tel que $n-4=a^4 \Rightarrow n=a^4+4$ et d'après la question n°1 on a $a^4+4=\left(a^2+2+2a\right)\left(a^2+2-2a\right)$.

Or $n>5 \Rightarrow a^4>1 \Rightarrow a>1 \Rightarrow a \geq 2$ d'où $\begin{cases} a^2+2+2a>1 \\ a^2+2-2a>1 \end{cases}$ donc n est factorisable par deux entiers naturels strictement supérieurs à 1, ce qui contredit sa primalité.

D'où l'entier $n-4$ ne peut pas être une puissance quatrième.

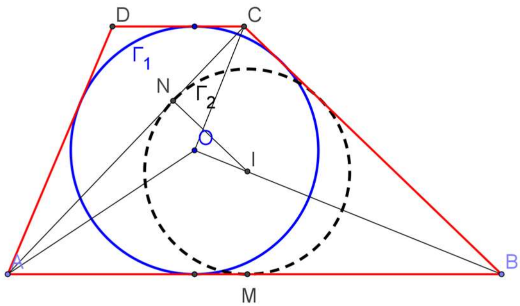
Exercice 2

Soit ABCD un trapèze, avec $(AB)\parallel(CD)$ et $AB > CD$, tel qu'il existe un cercle Γ_1 de centre O à l'intérieur du trap$[AC]$èze et tangent à ses quatre côtés. Le cercle Γ_2, inscrit dans le triangle ABC , est tangent aux côtés $[AB]$ et en M et N respectivement. On note I le centre de Γ_2.

1° Montrer que les points C, N, O et I sont cocycliques.

2° Montrer que les points O, M et N sont alignés.

Corrigé



1° Comme $(AB)\parallel(DC)$ alors $\angle ABC + \angle DCB = \pi$. D'où

$$\angle IOC = \angle BOC = \pi - \angle OBC - \angle OCB \Rightarrow$$

$$\angle IOC = \pi - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle DCB) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = \angle INC$$

Alors les points I , O , N et C sont cocycliques.

2° le triangle AMN est isocèle en A donc $(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM})=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ [\pi]$

Pour démontrer que N, O et M sont alignés, il suffit donc de montrer que $(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NO})=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ [\pi]$

ABCD étant un trapèze $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})=\pi-(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ **. Puisque O est le centre du cercle inscrit à ABCD, on a :**

$(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ **. De plus I est le centre du cercle inscrit à ABC, donc on a :**

$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ **.**

On en déduit que :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})&=(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OC})=-(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BC})\\&=-(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI})-(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB})=\pi\end{aligned}$$

Par ailleurs, par définition du point N, $(IN)\perp(AC)$ **. Ainsi,** $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{NI},\overrightarrow{NC})$**, si bien que les points N, O , I et C sont cocycliques d'après le théorème de l'angle inscrit.**

On sait alors que $(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NO})=(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IO})$ **Avec**

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IO}) &= (\overrightarrow{IC},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA})\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ [\pi]\end{aligned}$$

Exercice 3

Pour tout entiers naturels n et p avec $n \geq 1$ **on pose**

$$I_{n,p}=\int_0^n t^p\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \text{ et } J_{n,p}=\int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx.$$

1° Trouver une relation entre $I_{n,p}$ **et** $J_{n,p}$ **.**

2° Trouver une relation entre $J_{n,p}$ **et** $J_{n-1,p+1}$ **.**

3° En déduire les expressions de $J_{n,p}$ **et** $I_{n,p}$ **en fonction de n et p.**

4° Donner l'expression de $I_{n,n}$ **, en fonction de n, et calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n,n}$

Corrigé

1° vous avons $J_{n,p}=\int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx$. Soit $x=\frac{y}{n}\Rightarrow dx=\frac{1}{n}dy$ alors

si $x\mapsto 0,\ \ y\mapsto 0,$ et si $x\mapsto 1,\ \ y\mapsto n$ et on a :

$$\begin{aligned}J_{n,p}&=\int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx\\&=\int_0^n\left(\frac{y}{n}\right)^p\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\frac{1}{n}dy\\&=\frac{1}{n^{p+1}}\int_0^n y^p\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy\\&=\frac{1}{n^{p+1}}\times I_{n,p}\end{aligned}$$

2° Procédons à une intégration par partie : on pose

$$u(x)=(1-x)^n;\ \ v'(x)=x^p\Rightarrow u'(x)=-n(1-x)^{n-1}\quad \text{et}\quad v(x)=\frac{1}{p+1}x^{p+1}$$

$$J_{n,p}=\int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx$$

Donc
$$=\left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(1-x)^n\right]_0^1+\frac{n}{p+1}\int_0^n x^{p+1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{p+1}\times J_{n-1,p+1}$$

3° * <u>Calcul de $J_{n,p}$:</u>

D’après la question précédente : $J_{n,p}=\frac{n}{p+1}\times J_{n-1,p+1}$

$$J_{n,p}=\frac{n}{p+1}\times\frac{n-1}{p+2}J_{n-2,p+2}$$
$$=\frac{n}{p+1}\times\frac{n-1}{p+2}\times\frac{n-2}{p+3}\times\cdots\times\frac{1}{p+n}J_{0,p+n}$$

Soit $J_{n,p}=\dfrac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(p+k)}J_{0,p+n}$ avec

$$J_{0,p+n}=\int_0^1 x^{p+n}(1-x)^0\,dx=\int_0^1 x^{p+n}dx=\left[\frac{x^{p+n+1}}{(p+n+1)}\right]_0^1=\frac{1}{(p+n+1)}$$

D'où : $J_{n,p}=\dfrac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(p+k)}\times\dfrac{1}{(p+n+1)}=\boxed{\dfrac{n!}{\prod_{k=1}^{n+1}(p+k)}=\dfrac{n!p!}{(p+n+1)!}}$

* <u>Calcul de $I_{n,p}$:</u>

En utilisant le résultat de la question 1° on obtient :

$$I_{n,p}=n^{p+1}\times J_{n,p}$$
$$=n^{p+1}\times\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n+1}(p+k)}$$
$$=n^{p+1}\times\frac{n!}{\dfrac{(p+n+1)!}{p!}}$$
$$\Rightarrow \boxed{I_{n,p}=n^{p+1}\times\frac{n!p!}{(p+n+1)!}}$$

4° si $p=n$, on aura : $I_{n,n}=\boxed{n^{n+1}\times\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}I_{n,n}=+\infty$.

Exercice 4

Déterminer tous les triplets de réels positifs (x,y,z) solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y = (z-1)^2 \\ y^2 - z = (x-1)^2 \\ z^2 - x = (y-1)^2 \end{cases}$$

Corrigé

On considère le système :

$$\begin{cases} x^2 - y = (z-1)^2 \\ y^2 - z = (x-1)^2 \\ z^2 - x = (y-1)^2 \end{cases}$$

où x, y et z sont des nombres réels positifs

En développant les membres de droit et en additionnant les trois équations membre à membre, on obtient :

$x^2 + y^2 + z^2 - (x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x+y+z) + 3$, **soit**

$\boxed{x+y+z=3}$

On suppose que $x \le y, z$ **alors** $0 \le x \le 1$, **donc** $x^2 \le x \le 1$ **d'où**

$x^2 - y \le x - y \le 0$

Or $x^2 - y = (z-1)^2 \ge 0$, **il en résulte que** $x^2 - y = x - y = 0$.

Et par conséquence on aura : $x^2 = x$ **et** $x = y$

Si $x = y = 0$**, alors** $x + y + z = 3 \Rightarrow z = 3$**, mais dans ce cas on aura :** $(z-1)^2 = 4 \neq x^2 - y = 0$ **ce qui contredit à la première équation. Donc** $x = y = 1 \Rightarrow z = 3 - 1 - 1 = 1$**.**

Ainsi le triplet $(1;1;1)$ **constitue la solution unique du système ci-dessus.**

<u>Exercice 5 (20 Points)</u>

Déterminer toutes les fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **telles que,**

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad f(x^2 - y^2) = (x-y)(f(x) + f(y))$.

Corrigé de l'exercice 5 :

Soit f une fonction numérique telle que,

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad f(x^2 - y^2) = (x-y)(f(x) + f(y)) \quad \cdots\cdots\cdots \; (1)$

Pour $x = y = 0$ **on a :** $f(0) = 0 \times (2f(0)) = 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

Pour $x = -y \neq 0$ **on obtient :**

$2x(f(x) + f(-x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$**, donc f est impaire.**

En remplaçant y **par** $-y$ **dans l'égalité (1) on obtient :**

$f(x^2 - y^2) = (x+y)(f(x) + f(-y)) = (x+y)(f(x) - f(y)) \cdots\cdots\cdots (2)$

$(1) - (2) \;\Rightarrow\; (x-y)(f(x) + f(y)) - (x+y)(f(x) - f(y)) = 0 \Rightarrow xf(y) = yf(x)$

En particulier, pour $y = 1$ on obtient : $f(x) = x.f(1)$ ce qui montre que f est linéaire.

Réciproquement, il est clair que toute fonction linéaire est bien une solution du problème.

<u>Conclusion</u> : l'ensemble de solutions du problème est l'ensemble de toute les fonctions linéaires (du type $f(x) = k.x$, $k \in \mathbb{R}$).

Exercice 1

Soit A, B et C trois points non alignés d'affixes respectives

$z_A = ai;\ z_B = \frac{1}{2} + bi$ et $z_C = 1 + ci$ où a, b et c sont trois réels.

Notons I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$

1) Déterminer le lieux géométrique Γ du point M d'affixe z tel que $z = z_A\cos^4 t + 2z_B\cos^2 t\cdot\sin^2 t + z_C\sin^4 t$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$

2) Montrer que Γ et (IJ) ont un unique point commun.

Corrigé

Méthode 1 :

1) $z = z_A\cos^4 t + 2z_B\cos^2 t\cdot\sin^2 t + z_C\sin^4 t$

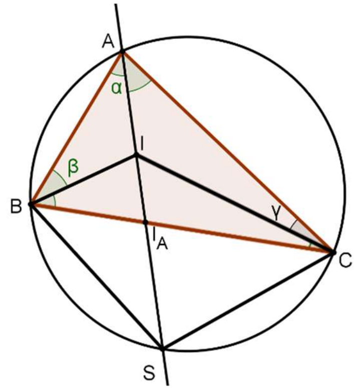
$\Leftrightarrow z = ai\cos^4 t + (1+2bi)\cos^2 t\cdot\sin^2 t + (1+ci)\sin^4 t$

$\Leftrightarrow z = (\cos^2 t\cdot\sin^2 t + \sin^4 t) + i(a\cos^4 t + 2b\cos^2 t\cdot\sin^2 + c\sin^4 t)$

$\Leftrightarrow z = \sin^2 t + i\left[a(1-\sin^2 t)^2 + 2b\left(1-\sin^2 t\right)\sin^2 t + c\sin^4 t\right]$

(1)

Posons $z = x + iy$ alors on a



$$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = a(1-\sin^2 t)^2 + 2b\left(1-\sin^2 t\right)\sin^2 t + c\sin^4 t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = a(1-x)^2 + 2b\left(1-x\right)x + cx^2 \end{cases}$$

Donc Γ est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $0 \le x \le 1$ et

$y = a(1-x)^2 + 2b\left(1-x\right)x + cx^2 \Rightarrow y = (a+c-2b)x^2 + 2(b-a)x + a$.

$$a + c - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + bi = \frac{ai + 1 + ci}{2} \Rightarrow z_B = \frac{z_A + z_C}{2} \Rightarrow B = A * C$$

ce qui est impossible car les points A, B et C ne sont pas alignés.

Alors $a + c - 2b \neq 0$ et donc on a

$$y = (a+c-2b)\left[x^2 + 2\frac{b-a}{a+c-2b}x\right] + a$$

$$y=(a+c-2b)\left[\left(x+\frac{b-a}{a+c-2b}\right)^2-\left(\frac{b-a}{a+c-2b}\right)^2\right]+a$$

$$y=(a+c-2b)\left(x+\frac{b-a}{a+c-2b}\right)^2-\frac{(b-a)^2}{a+c-2b}+a$$

$$y=(a+c-2b)\left(x+\frac{b-a}{a+c-2b}\right)^2-\frac{b^2+a^2-2ab+a^2+ac-2ab}{a+c-2b}$$

$$y+\frac{b^2+a^2-2ab+a^2+ac-2ab}{a+c-2b}=(a+c-2b)\left(x+\frac{b-a}{a+c-2b}\right)^2$$

C'est de la forme $y-y_0=\alpha\left(x-x_0\right)^2$. Donc Γ est une parabole.

2) On a $I\left(\frac{1}{4},\frac{a+b}{2}\right)$ et $J\left(\frac{3}{4},\frac{a+c}{2}\right)$.

L'équation réduite de la droite (IJ) est

$$y=(c-a)x+\frac{1}{4}(3a+2b-c) \qquad (2)\ .$$

L'intersection de la parabole Γ et la droite (IJ) vérifie les relations (1) et (2) c'est-à-dire :

$$\begin{cases} y=(a+c-2b)x^2+2(b-a)x+a \\ y=(c-a)x+\frac{1}{4}(3a+2b-c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+c-2b)x^2+2(b-a)x+a-(c-a)x+\frac{1}{4}(3a+2b-c)=0$$

$\Rightarrow (a+c-2b)(2x-1)^2=0$ **ce qui montre qu'il y a une unique**

solution $x=\frac{1}{2}$. Ce qui montre que Γ et (IJ) ont un unique point commun

Méthode 2 :

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}i \quad \text{et} \quad z_J=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}i$$

Pour tout point M du segment $[IJ]$, il existe un réel $k\in[0,1]$ tel que $M=\text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline I & J \\ \hline k & 1-k \\ \hline\end{array}$ donc son affixe est

$$\begin{aligned} z_M &= kz_I+(1-k)z_J \\ &=\left(\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}i\right)k+(1-k)\left(\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}i\right) . \\ &=\left(\frac{3}{4}-\frac{k}{2}\right)+\left(\frac{b+c}{2}+\frac{a-c}{2}k\right)i \end{aligned}$$

Pour que M appartient à Γ il faut que son affixe vérifie l'égalité $z=z_A\cos^4 t+2z_B\cos^2 t\cdot\sin^2 t+z_C\sin^4 t$ d'où

$$\begin{cases} \frac{3}{4}-\frac{k}{2}=\cos^2 t\cdot\sin^2 t+\sin^4 t=\sin^2 t \\ \frac{b+c}{2}+\frac{a-c}{2}k=a\cos^4 t+2b\cos^2 t\cdot\sin^2+c\sin^4 t \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $a-c$ et en l'ajoutant à l'équation 2.

$$\frac{3}{4}(a-c)+\frac{b+c}{2}=a\cos^4 t+a\sin^4 t+(a+2b-c)\cos^2 t\cdot\sin^2 t$$

$$1=(\cos^2 t+\sin^2 t)^2$$

Or $\quad = \cos^4 t + 2\cos^2 t\cdot \sin^2 t + \sin^4 t$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^4 t+\sin^4 t = 1-2\cos^2 t\cdot\sin^2 t}$$

D'où $\dfrac{3}{4}(a-c)+\dfrac{b+c}{2} = a(1-2\cos^2 t\cdot\sin^2 t)+(a+2b-c)\cos^2 t\cdot\sin^2 t$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(a-c)+\frac{b+c}{2} = a+(2b-a-c)\cos^2 t\cdot\sin^2 t$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(a-c)+\frac{b+c}{2}-a = (2b-a-c)\cos^2 t\cdot\sin^2 t$$

$$\Rightarrow (2b-a-c)\left(\cos^2 t\cdot\sin^2 t-\frac{1}{4}\right)=0$$

Les points A, B et C n'étant pas alignés alors $2b-a-c\neq 0$ **donc**

$\cos^2 t\cdot\sin^2 t = \dfrac{1}{4}$.

Ce qui s'écrit $\left(\sin^2 t-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$ **donc** $\sin^2 t = \dfrac{1}{2}$ **et comme**

$\dfrac{3}{4}-\dfrac{k}{2}=\sin^2 t$ **alors on a** $\dfrac{3}{4}-\dfrac{k}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$

D'où Γ **et** (IJ) **ont un unique point commun.**

L'affixe de ce point est

$$z=\left(\frac{3}{4}-\frac{k}{2}\right)+\left(\frac{b+c}{2}+\frac{a-c}{2}k\right)i=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{b+c}{2}+\frac{a-c}{4}\right)i=\frac{1}{2}+\frac{a+2b+c}{4}i$$

Exercice 2

Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. Soit I le centre de son cercle inscrit, I_A le pied de la bissectrice intérieure issue de A et S le point d'intersection de cette bissectrice avec Γ.

1° Faire une figure

2° Montrer que S est sur la médiatrice de $[BC]$.

3° Montrer que $BS = IS$.

4° Montrer que les triangles ABS et SBI_A sont semblables.

NB : Le point S est appelé le pôle sud de ABC (par rapport à A) et le cercle de centre S passant par B, C et I est appelé le cercle antarctique de ABC (par rapport à A)

Corrigé

1° La figure

2° On a :

$$\begin{aligned} \widehat{SBC} &= \widehat{SAC} && \text{Cocyclicité} \\ &= \widehat{SAB} && \text{bissectrice} \\ &= \widehat{SCB} && \text{Cocyclicité} \end{aligned}$$

D'où $\widehat{SBC} = \widehat{SCB}$ ce qui montre que le triangle SBC est isocèle en S donc $S \in \text{med}[BC]$

3° On a

$\widehat{SBI} = \widehat{SBC} + \widehat{CBI} = \alpha + \beta$ or

$\widehat{SIB} = \pi - \widehat{AIB} = \pi - \left[\pi - (\alpha + \beta)\right] = \alpha + \beta$

D'où $\widehat{SBI} = \widehat{SIB}$ alors le triangle SBI est isocèle en S . Donc $IS = SB = SC$.

4° Comme $\widehat{I_ASB} = \widehat{BSA} = \theta$ et $\widehat{I_ABS} = \widehat{BAS} = \alpha$ alors les triangles ABS et SBI_A sont semblables.

Exercice 3

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc = 1$

1. Vérifier que $a^5 + b^5 = (a+b)\left[(a-b)(a^3 - b^3) + a^2b^2\right]$

2. Montrer que $\dfrac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \dfrac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \dfrac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$

Corrigé

1. On a

$$\begin{aligned}(a+b)\left[(a-b)(a^3 - b^3) + a^2b^2\right] &= (a^2 - b^2)(a^3 - b^3) + (a+b)a^2b^2 \\ &= a^5 - a^2b^3 - a^3b^2 + b^5 + a^3b^2 + a^2b^3 \\ &= a^5 + b^5\end{aligned}$$

2. Comme $a - b$ et $a^3 - b^3$ sont de même signe alors $(a-b)(a^3 - b^3) \geq 0$. D'où $a^5 + b^5 \geq (a+b)a^2b^2$ ce qui entraine que

$$a^5+b^5+ab \geq (a+b)a^2b^2+ab \Rightarrow \frac{1}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{1}{(a+b)a^2b^2+ab}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{ab}{(a+b)a^2b^2+ab} = \frac{1}{(a+b)ab+1}$$

$$= \frac{c}{(a+b)abc+c}$$

$$= \frac{c}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{c}{a+b+c}} \quad (1).$$

On en déduit par analogie que $\boxed{\dfrac{bc}{a^5+b^5+bc} \leq \dfrac{a}{a+b+c}}$ **(2) et**

que $\boxed{\dfrac{ca}{a^5+b^5+ca} \leq \dfrac{b}{a+b+c}}$ **(3)**

La somme des trois inégalités montre que

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq \frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}$$

Or $\dfrac{c}{a+b+c}+\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{a+b+c}=\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1$

D'où $\boxed{\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}+\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}+\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1}$

<u>Exercice 4</u>

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)+f(y) \ .$$

Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n \cdot f(1)$

2. $\forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) = p \cdot f(1)$

3. $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = r \cdot f(1)$

Corrigé

1. $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

Donc $f(0) = 0 \times f(1)$ **, la proposition est donc vraie pour** $n = 0$ **.**

Si $f(n) = n \cdot f(1)$ **alors**

$$f(n+1) = f(1) + f(n) = f(1) + n \cdot f(1) = (n+1)f(1)$$

2. $\forall p \in \mathbb{Z}_+$ **on a** $f(p) = p \cdot f(1)$ **d'après la question 1.**

$\forall p \in \mathbb{Z}_-$, $\exists! n \in \mathbb{N} : n + p = 0$ **.On a** $f(n) = nf(1)$ **et** $f(n+p) = 0$

$f(n+p) = f(n) + f(p) \Rightarrow f(p) = -f(n) = -nf(1) = pf(1)$ **. Donc**

$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) = p \cdot f(1)$.

3. $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : \quad r = \frac{p}{q}$ **alors**

$p = \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}$ **(q fois) donc**

$$f(p) = f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}\right) \quad (q \text{ fois}) = f\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right) + \cdots + f\left(\frac{p}{q}\right) \quad (q \text{ fois})$$

$$\Rightarrow f(p) = qf\left(\frac{p}{q}\right).$$

Ce qui montre que $pf(1) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$**. D'où** $\frac{p}{q}f(1) = f\left(\frac{p}{q}\right)$**. On en déduit donc que** $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = r \cdot f(1)$**.**

Exercice 1

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $3^{n^2} > (n!)^4$.

Corrigé

Cette inégalité est évidemment vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Supposons pour la suite $n \geq 3$

Pour montrer que $3^{n^2} > (n!)^4$ il suffit de montrer que $\ln\left(3^{n^2}\right) > \ln\left((n!)^4\right) \Leftrightarrow n^2 \ln 3 - 4\ln(n!) > 0$

Or $n^2 \ln 3 - 4\ln(n!) = 4n\left(n\frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln(n!)}{n}\right) = 4n\left(n\frac{\ln 3}{4} - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right)\right)$

Puisque la moyenne géométrique est inférieure à celle arithmétique alors $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2} \Rightarrow \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) \leq \ln\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Il suffit donc de montrer que $\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) < n\frac{\ln 3}{4}$.

Pour cela on définit sur $[3,+\infty[$ la fonction numérique f par $f(x) = x\frac{\ln 3}{4} - \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

On a $f'(x)=\frac{\ln 3}{4}-\frac{1}{x+1}$ et $f''(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ qui est positif donc f' est croissante et $f'(3)=\frac{\ln 3}{4}-\frac{1}{4}>0$ donc f est croissante sur $[3,+\infty[$.

Comme $f(3)=3\frac{\ln 3}{4}-\ln 2>0$ donc $\forall x\in[3,+\infty[$ on a $f(x)>0$.

D'où $\forall n\geq 3$ on a $f(n)>0$ c'est-à-dire que $\forall n\geq 3$, $\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)<n\frac{\ln 3}{4}$. Ce qui achève la démonstration.

Exercice 2

Soit a et b deux entiers naturels.

1) Montrer que pour tout a, le nombre $a(a^4-1)$ est divisible par 3.

2) Trouver – s'ils existent- tous les couples (a,b) vérifiant la condition suivante :

« a^4+1 et b^2-1 ne sont pas divisibles par 39, mais le produit $(a^4+1)(b^2-1)$ est divisible par 39 ».

Corrigé

1° $a(a^4-1)=(a-1)a(a+1)(a^2+1)$

Comme le produit de 3 entiers consécutifs est toujours divisible par 3 alors $(a-1)a(a+1)$ est divisible par 3. D'où $a(a^4-1)$ est divisible par 3.

2° Comme $39 = 3\times 13$ divise $(a^4+1)(b^2-1)$ alors $(a^4+1)(b^2-1)$ est divisible par 3 et par 13 .

$3\left|(a^4+1)(b^2-1)\right.$ et 3 premier $\Rightarrow 3\left|(a^4+1)\right.$ ou $3\left|(b^2-1)\right.$.

La table de congruence modulo 3 montre que $a^4 \equiv 0[3]$ ou $a^4 \equiv 1[3]$ donc 3 ne divise pas a^4+1.

D'où $3\left|(b^2-1)\right.$ c'est-à-dire que b n'est pas un multiple de 3.

D'autre part comme $\begin{cases} 3\left|(b^2-1)\right. \\ 39 \text{ ne divise pas } (b^2-1) \end{cases} \Rightarrow 13$ ne divise pas (b^2-1) et puisque $13\left|(a^4+1)(b^2-1)\right.$ alors $13\left|(a^4+1)\right.$ ce qui est impossible car le reste dans la division euclidienne par 13 de a^4+1 est soit 1, soit 2, soit 4 soit 10.

Alors il n'existe aucun couple (a,b) solution du problème.

Exercice 3

L'objectif est de déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x}dx$

1) On pose $g(x) = \tan x$ avec $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $(g^{-1})'(x)$.

2) En posant $z = g(\frac{x}{2})$, vérifier que $I = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{g^{-1}(z)}{z}dz$.

3) Calculer l'intégrale $J=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\ln z}{z^2+1}dz$.

4) Déterminer la valeur de l'intégrale $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x}{\sin x}dx$.

Corrigé

1. $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ (g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

2.

$$z=g(\frac{x}{2})\Rightarrow dz=\frac{1}{2}g'(\frac{x}{2})dx=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2(\frac{x}{2})\right)dx=\frac{1}{2}\left(1+z^2\right)dx\Rightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2}$$

Or

$$z=g(\frac{x}{2})=\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}=\frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=\frac{1}{2}\sin x\left(1+\tan^2(\frac{x}{2})\right)=\frac{1+z^2}{2}\sin x$$

.

D'où $\sin x=\dfrac{2z}{1+z^2}$ **. En plus** $z=g(\frac{x}{2})\Rightarrow x=2\tan^{-1}(z)=2g^{-1}(z)$

D'autre part $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow z=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **et** $x=\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow z=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

Alors on a $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x}{\sin x}dx\Leftrightarrow I=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{2g^{-1}(z)}{\frac{2z}{1+z^2}}2\frac{dz}{1+z^2}=2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{g^{-1}(z)}{z}dz$

3. Posons $z=\frac{1}{t}\Rightarrow\begin{cases}dz=-\frac{dt}{t^2}\\ \frac{\ln z}{z^2+1}=\frac{-t^2\ln t}{t^2+1}\end{cases}$

Donc

$$J=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\ln z}{z^2+1}dz=J=\int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{-t^2\ln t}{t^2+1}.\frac{-dt}{t^2}=\int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\ln t}{t^2+1}dt=-J\Rightarrow J=0$$

4. Calculons J par une intégration par parties :

$\begin{cases}u=\ln z\\ v'=\frac{1}{1+z^2}=\left(g^{-1}\right)'(z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=\frac{1}{z}\\ v=g^{-1}(z)\end{cases}$ d'où

$$J=\left[g^{-1}(z).\ln z\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}-\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{g^{-1}(z)}{z}dz$$

$$\Rightarrow J=g^{-1}\left(\sqrt{3}\right).\ln\left(\sqrt{3}\right)-g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}I$$

Donc $J=\frac{\pi\ln 3}{6}+\frac{\pi\ln 3}{12}-\frac{1}{2}I\Rightarrow J=\frac{\pi\ln 3}{4}-\frac{1}{2}I$

Or $J=0$ d'où $\boxed{I=\frac{\pi\ln 3}{2}}$

Exercice 4

On construit à l'extérieur d'un triangle ABC direct, trois triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB'. Leurs centres sont nommés respectivement O_1, O_2 et O_3.

1) Montrer que $AA' = BB' = CC'$.

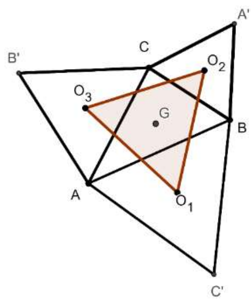
2) Montrer que le triangle $O_1O_2O_3$ est équilatéral et que son centre de gravité G est celui du triangle ABC.

3) On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $d = O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$.

Soit s l'aire du triangle ABC.

Exprimer d en fonction de a, b, c et s.

Corrigé



1. La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme C en B' et C' en B d'où $CC' = BB'$. De même la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme A en C' et A' en C d'où $AA' = CC'$.

On a donc $AA' = BB' = CC'$. Soit p cette distance.

Remarquons que $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'C}\right) = \left(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}\right) = \left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{\pi}{3}$

2. On sait que $\begin{cases} \overrightarrow{BO_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC'}\right) \\ \overrightarrow{BO_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BC}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{C'C}\right)$

Par analogie on a $\begin{cases} \overrightarrow{O_1O_3} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C}\right) \\ \overrightarrow{O_2O_3} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{A'A}\right) \end{cases}$

$$O_1O_2{}^2 = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{C'C}\right)^2$$

$$O_1O_2{}^2 = \frac{1}{9}\left(AA'^2 + C'C^2 + 2AA'.C'C.\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)\right) = \frac{1}{3}p^2$$

Avec le même raisonnement on trouve

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = \frac{p}{\sqrt{3}} \ .$$

D'où $O_1O_2O_3$ est équilatéral.

Supposons que le plan est muni d'un repère orthonormal direct, dans lequel on notera Z_M l'affixe de tout point M. On a :

$$\begin{cases} Z_{A'} - Z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_B - Z_C\right) \\ Z_{B'} - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_C - Z_A\right) \Rightarrow Z_{A'} + Z_{B'} + Z_{C'} = Z_A + Z_B + Z_C \\ Z_{C'} - Z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_A - Z_B\right) \end{cases}$$

Donc les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité G.

D'autre part on a

$$\begin{cases} 3\overrightarrow{GO_1} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} \\ 3\overrightarrow{GO_2} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} \\ 3\overrightarrow{GO_3} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\left(\overrightarrow{GO_1} + \overrightarrow{GO_2} + \overrightarrow{GO_3}\right) = 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$$

Donc G est aussi le centre de gravité du triangle $O_1O_2O_3$.

3. On a trouvé précédemment que $d = O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = \frac{p}{\sqrt{3}}$

, avec $p = AA' = BB' = CC'$.

D'après Alkashi on a

$p^2 = BB'^2 = AB^2 + AB'^2 - 2AB \times AB' \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right)$ .Or

$AB' = AC = b$ et $AB = c$. Soit α une mesure de l'angle

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}\right) = \alpha + \frac{\pi}{3}$.

D'où $p^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ donc

$$p^2 = c^2 + b^2 - 2cb\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right) = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}\left(bc\sin\alpha\right)$$

.

Or $s = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \Rightarrow bc\sin\alpha = 2s$ et d'après Alkashi on a

$bc\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)$. En remplaçant on trouve

$$p^2 = c^2 + b^2 - \frac{1}{2}\left(-a^2 + b^2 + c^2\right) + 2s\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2s\sqrt{3} \Rightarrow p = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2s\sqrt{3}}\ .$$

D'où $d = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2s\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{2s}{\sqrt{3}}}}$

Exercice 5

On se propose de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$:

$$f\left(f(x) + 2f(y)\right) = f(2x) + 8y + 42\ .$$

1) Montrer que pour tous u, v dans $\mathbb{R}$: si $f(u) = f(v)$, alors $u = v$.

2) Trouver toutes les fonctions solutions du problème.

Corrigé

1) Soit f une solution de l'équation fonctionnelle (E) :

$$f\left(f(x) + 2f(y)\right) = f(2x) + 8y + 42\ .$$

Pour $x = 0$ on a $f\left(f(0) + 2f(y)\right) = f(0) + 8y + 42$

Si $f(u)=f(v)$, alors :

$f(0)+2f(u)=f(0)+2f(v) \Rightarrow f\left(f(0)+2f(u)\right)=f\left(f(0)+2f(v)\right)$

$\Rightarrow f(0)+8u+42=f(0)+8v+42$, d'où $u=v$.

2. Si $y=\dfrac{-21}{4}$ alors on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f\left(f(x)+2f(\dfrac{-21}{4})\right)=f(2x)$ et

d'après 1°, on a $f(x)+2f\left(\dfrac{-21}{4}\right)=2x$

ce qui montre que $f(x)=2x-2f\left(\dfrac{-21}{4}\right)$ alors f est une fonction

affine qui s'écrit sous la forme $f(x)=2x+k$ où k est une

constante égale à $f(0)$.

En remplaçant dans l'équation de départ (E) par $x=0$ et

$y=0$, on trouve :

$$f\left(f(0)+2f(0)\right)=f(0)+42$$

$$f\left(3k\right)=k+42$$

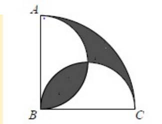
$$6k+k=k+42$$

$$k=7$$

D'où $\boxed{f(x)=2x+7}$

Exercice 1

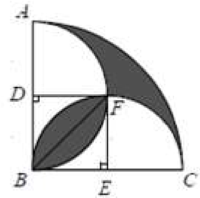
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle avec $BA = BC = a$.



Calculer l'aire grisée.

Solution.

On note X l'aire de la partie hachurée située hors des deux demi-cercles et Y celle située dans les deux demi-cercles. On note S_1 l'aire du demi-cercle de diamètre $[BC]$ et S_2 celle du quart de cercle de centre B et de rayon BC. On a donc :



$$S_2 = \frac{1}{4}\pi \times a^2 \quad ; \; S_1 = \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8}\pi$$

$$X = S_2 - 2S_1 + Y = \frac{a^2}{4}\pi - 2\times\frac{a^2}{8}\pi + Y \quad \text{Donc } \boxed{X = Y}$$

Soit D et E les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$ et F le point tel que $BEFD$ soit un carré.

E et D sont respectivement les centres des cercles de diamètres $[BC]$ et $[AB]$ de rayon $\frac{a}{2}$. Or $FE = FD = \frac{a}{2}$ donc F est le point commun de ces deux demi-cercles autre que B.

La diagonale $[BF]$ partage l'aire Y en deux parties d'aire $\frac{Y}{2}$

égale

à l'aire du quart de cercle de centre E et de rayon $\frac{a}{2}$ diminuée de l'aire du triangle BEF : $\frac{Y}{2} = \frac{\pi a^2}{16} - \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}$ donc

$Y = \frac{a^2(\pi - 2)}{8}$

Finalement l'aire hachurée est égale à $X + Y = 2Y = \frac{a^2(\pi - 2)}{4}$

Exercice 2

Soit un entier $n \geq 2$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$; le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est impair et non premier.

2) Si $n = 3$, déterminez toutes les valeurs entières de m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.

3) Montrez que pour n'importe quel entier n, il y a toujours un nombre fini de valeurs entières m pour lesquelles m^2+n^2+1 est divisible par $m-n+1$ et par $m+n+1$.

Corrigé

1) On distingue deux cas :

- si $n \equiv 0[2]$, alors $n^4 \equiv n^2 \equiv 0[2] \Rightarrow n^4+n^2+1 \equiv 1[2]$

Ce qui veut dire que le nombre n^4+n^2+1 est impair.

- si $n \equiv 1[2]$, alors $n^4 \equiv n^2 \equiv 1[2]$ et $n^4+n^2 \equiv 0[2]$

$\Rightarrow n^4+n^2+1 \equiv 1[2]$, dans ce cas le nombre n^4+n^2+1 est aussi impair. En plus, nous avons :

$$n^4+n^2+1 = n^4+2n^2+1-n^2 = \left(n^2+1\right)^2 - n^2 = \left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$$

ce qui justifie que n^4+n^2+1 est non premier.

NB : on peut aussi traiter les deux cas n=2p et n=2p+1 pour démontrer que n^4+n^2+1 est impair.

2) Lorsque $n = 3$, il est nécessaire que $m^2 + 10$ soit divisible par $m - 2$ et $m + 4$. On peut écrire $m^2 + 10 = (m-2)(m+2)+14$, ce qui implique que $m - 2$ doit être un diviseur de 14.

De la même façon, $m^2 + 10 = (m-4)(m+4)+26$ donc $m + 4$ doit diviser 26.

Puisque $m - 2$ divise 14, alors elle doit être un nombre parmi $-14, -7, -2, -1, 1, 2, 7, 14$ donc m doit être un nombre parmi $-12, -5, 0, 1, 3, 4, 9, 16$. Comme $m + 4$ divise 26, m doit être un nombre parmi $-30, -17, -6, -5, -3, -2, 9, 22$. Les seules valeurs de m communes aux deux listes sont $\boxed{m = -5}$ et $\boxed{m = 9}$.

3) On peut écrire

$$m^2 + n^2 + 1 = (m - n + 1)(m + n + 1) + 2(n^2 - n + 1).$$

Afin que $m - n + 1$ divise $m^2 + n^2 + 1$, il doit aussi diviser $2(n^2 - n + 1)$. Pour toute valeur de n, $2(n^2 - n + 1) > 0$ et a donc un nombre fini de diviseurs positifs. Il y a donc un nombre fini de valeurs possibles pour m.

<u>Exercice 3 :</u> (20 points)

L'objectif est de déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x \cos x}} dx$$

1) On pose $g(x) = \sin x$ avec $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $(g^{-1})'(x)$.

2) En posant $x = \frac{\pi}{4} + y$, vérifier que $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{\sqrt{2 + \cos(2y)}} dy$

3) En posant $z = \sin y$, montrer que $I = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{\sqrt{3 - 2z^2}}$

4) Exprimer alors la valeur de I en utilisant g^{-1}.

Corrigé

1) Soit $g(x) = \sin x$ avec $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

Calcul de $(g^{-1})'(x)$: Nous avons : $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$.

Or $g'(x) = \cos x = \sqrt{1 - g^2(x)}$ d'où

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(g(g^{-1}(x))\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2) Si $x = \frac{\pi}{4} + y$, nous voyons alors que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x \cos x}} dx = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos y + \sin y\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2y\right)}} dy$$

$$= \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{\sqrt{2 + \cos(2y)}} dy + \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\sqrt{2 + \cos(2y)}} dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{\sqrt{2 + \cos(2y)}} dy$$

Car la première fonction est paire, la seconde impaire et l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à 0.

3) En posant $z = \sin y$, on obtient :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{\sqrt{2 + \cos(2y)}} dy = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{\sqrt{3 - 2z^2}}$$

4) Pour $t=z\sqrt{\frac{2}{3}}$, on obtient :

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dz}{\sqrt{3-2z^2}}=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}dt}{\sqrt{3}\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\left[g^{-1}(x)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Et l'on peut conclure : $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x\cos x}}dx=\sqrt{2}g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(t)=\frac{t-1}{t\ln t}$ si $t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$ et $f(1)=1$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ puis justifier l'existence de l'intégrale $\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$ pour $x\in\mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$.

2) Utiliser $\int_x^{x^2}f(t)dt$ pour calculer $\lim_{x\to1}\left(\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt\right)$.

Corrigé

1) f est continue sur $\mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$ comme étant un rapport de deux fonctions continues sur cet ensemble. Calculons la limite

de f en 1 ; posons $t=1+h$ $(h>-1)$; $f(1+h)=\dfrac{h}{(1+h)\ln(1+h)}$,

on sait que la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+h)}{h}$ est 1. f a donc pour limite 1 en 1et par suite est continue en ce point. D'où $\boxed{\text{f est continue sur}}$ $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$

2) (x est évidement supposé >0) f étant continue sur $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$, elle admet donc une primitive F sur cet ensemble ; $\int_x^{x^2} f(t)dt$ existe donc et vaut $F(x^2)-F(x)$

Existence de $\int_x^{x^2}\dfrac{1}{\ln t}dt$ (on suppose $x>0$ et $x\neq 1$) :

La fonction $t\to\dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$

De plus x et x^2 sont toujours d'un même coté de 1.

$t\to\dfrac{1}{\ln t}$ est donc continue sur le segment d'extrémités x et x^2

$\int_x^{x^2}\dfrac{dt}{\ln t}$ existe et vaut $\int_x^{x^2}\left(f(t)+\dfrac{1}{t\ln t}\right)dt=\int_x^{x^2}f(t)dt+\int_x^{x^2}\dfrac{1}{t\ln t}dt$

ce qui donne : $F(x^2)-F(x)+\left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2}$ soit

$F(x^2)-F(x)+\ln\left|\dfrac{\ln x^2}{\ln x}\right|=F(x^2)-F(x)+\ln 2$ car $\ln x^2=2\ln x$

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, elle y est continue, $F(x^2)$ et $F(x)$ ont pout limite $F(1)$ en 1, par conséquent $\boxed{\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=\ln 2}$.

Exercice 5

ABC est un triangle d'angles aigus et dont les hauteurs $[AD]$ et $[BE]$ se coupent en H. soit $[M]$ le milieu de $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles DEM et ABH se coupent en P et Q avec P est le point situé dans le demi-plan délimité par (CH) contenant A. On désigne par R le point d'intersection de (ED) et (PH) .

1) Montrer que $\widehat{RDA}=\widehat{RPA}$ puis déduire que les points B, P, R et E sont cocycliques.

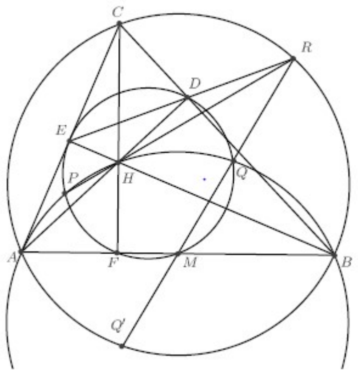
2) Montrer que R appartient au cercle circonscrit au triangle ABC

3) Montrer que les droites (ED), (PH) et (MQ) sont concourantes en R.

Corrigé

1) Notons d'abord F le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Puisque les points E, C, D et H d'une part et A, P, H et B d'autre part sont cocycliques (en effet : ECH et DCH

sont deux triangles rectangles de même hypoténuse $[CH]$, et le cercle circonscrit au triangle AHB passe par P on a :



$\widehat{RDA} = \pi - \widehat{EDA}$ **angles supplémentaires**

$= \pi - \widehat{EDH}$ **alignement**

$= \pi - \widehat{ECH}$ **cocyclicité**

$= \dfrac{\pi}{2} + \widehat{BAC}$

D'autre part $\widehat{RPA} = \widehat{HPA} = \pi - \widehat{HBA} = \dfrac{\pi}{2} + \widehat{BAC}$

Donc $\boxed{\widehat{RDA} = \widehat{RPA}}$

Comme $\widehat{RDA} = \widehat{RPA}$ **donc les points A, P, D et R sont cocycliques ce qui implique que**

$\widehat{PBE} = \widehat{PBH}$ **(alignement)**

$= \widehat{PAH}$ **cocyclicité**

$= \widehat{PAD}$ **alignement**

$= \widehat{PRD}$ **cocyclicité**

$= \widehat{PRE}$ **alignement**

Donc les points P, B, R et E sont cocycliques.

2) Les points D, E, F et M appartiennent au cercle de 9 points du triangle ABC (cercle d'Euler passant par les trois milieux des trois côtés du triangle ; le pied de chacune des trois hauteurs ; le milieu de chacun des trios segments reliant l'orthocentre et un sommet du triangle) et puisque les quadrilatères APDR, BPRE, BCEF et ACDF sont inscriptibles on a :

$$\begin{aligned}\widehat{ARB} &= \widehat{PRB} - \widehat{PRA}\\ &= \widehat{PEB} - \widehat{PDA}\\ &= \widehat{PEF} + \widehat{FEB} - \widehat{PDF} + \widehat{ADF}\\ &= \widehat{FEB} + \widehat{ADF}\\ &= \widehat{FCB} + \widehat{ACF}\\ &= \widehat{ACB}\end{aligned}$$

Donc R, point d'intersection de (ED) et (PH) appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Soit Q' et R' les points d'intersections de (MQ) avec le cercle circonscrit au triangle ABC telle sorte que les points Q', M, Q et R' soient alignés dans cet ordre. Montrons que $R' = R$

Rappelons d'abord que le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est $\dfrac{AB}{2\sin\widehat{ACB}}$

Et celui du cercle circonscrit au triangle ABH est

$$\frac{AB}{2\sin\widehat{AHB}} = \frac{AB}{2\sin\left(\pi - \widehat{ACB}\right)} = \frac{AB}{2\sin\widehat{ACB}}$$

Donc les deux cercles ont le même rayon, ils sont donc symétriques par rapport au point M, milieu de $[AB]$ et on a $MQ = MQ'$.

Comme les triangles AEB et ADB sont rectangles d'hypoténuse $[AB]$ alors le point M, milieu de $[AB]$ est le centre des cercles circonscrits aux triangles AEB et ADB alors

$MA = ME = MD = MB$

De la puissance du point M par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC on a :

$$MQ \times MR' = MR \times MR' = MA \times MB = MD^2$$

en particulier cela signifie que le cercle circonscrit au triangle $DR'Q$ est tangent à (MD) ce qui veut dire d'après le théorème

de la tangente que $\widehat{QR'D} = \widehat{MDQ}$ et de l'alignement on a

$\widehat{MR'D} = \widehat{MDQ}$

D'une manière analogue on montre que $MQ \bullet MR' = ME^2$ et par suite $\widehat{MR'E} = \widehat{QR'E} = \widehat{MEQ}$ et $\widehat{MR'E} = \widehat{MEQ} = \widehat{MDQ} = \widehat{MR'D}$

Donc $R' \in (ED)$

D'une manière analogue on montre que le point R'', intersection de (MP) et le cercle circonscrit au triangle ABC, appartient à (ED).

Donc les points R, R', R'' sont communs à (ED) et au cercle circonscrit au triangle ABC, alors deux parmi ces trois points sont confondus.

Or, $R \in (PH)$, $R'' \in (MP)$ et (MP) et (PH) se coupent en P alors $R \neq R''$

De même $R' \in (MQ)$, $R'' \in (MP)$ et (MP) et (MP) se coupent en M alors $R' \neq R''$

D'où $R = R'$

Exercice 1 :

1° Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[$ on a : $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2° En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $\prod_{k=2}^{n} \ln k < \dfrac{\sqrt{n!}}{n}$

Corrigé

1° $\forall x \in]1;+\infty[$ on a

$\ln x - \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} = \ln x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2\ln\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2\ln t - t + \dfrac{1}{t}$, **avec**

$t = \sqrt{x}$.

Soit $f(t) = 2\ln t - t + \dfrac{1}{t}$, $\forall t \in [1;+\infty[$. **On a**

$f'(t) = \dfrac{2}{t} - 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{-(t-1)^2}{t^2} < 0$

Donc f est strictement décroissante et alors $\forall t \in [1;+\infty[$ on a

$f(t) \leq f(1) = 0$.

D'où $\forall x \in]1;+\infty[$ $\ln x - \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} < 0$, ce qui montre que $\forall x \in]1;+\infty[$

on a $\ln x < \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ et comme $0 < x-1$ on a donc

$$\frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}} , \ \forall x \in \left]1;+\infty\right[.$$

2° En utilisant la question 1° on a : $\forall k > 1;\ \frac{\ln k}{k-1} < \frac{1}{\sqrt{k}}$**. Le produit de 2 à n donne** $\prod_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k-1} < \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ **.**

Les propriétés du produit et des fractions nous donnent (moyennant un changement de variable) :

$$\frac{\prod_{k=2}^{n} \ln k}{\prod_{k=2}^{n} (k-1)} < \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \frac{\prod_{k=2}^{n} \ln k}{\prod_{k=1}^{n-1} k} < \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \prod_{k=2}^{n} \ln k < \left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) . \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} .$$

Or $\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) . \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) . \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n} n! . \frac{1}{\sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{n!}}{n} \Rightarrow \prod_{k=2}^{n} \ln k < \frac{\sqrt{n!}}{n}$ **.**

Exercice 2

On considère l'équation : $1 + 2^{x} + 2^{2x+1} = y^{2}$ **où** (x, y) **sont des entiers relatifs.**

1° Donner une solution particulière de cette équation.

2° Montrer que si $x \neq 0$ **alors** $x \geq 3$ **et** $y = 2^{x-1} \times m + n$ **(avec** m **impair et** $n = 1$ **ou** $n = -1$ **) .**

3° Déterminer tous les couples (x, y) **d'entiers relatifs qui vérifient l'équation :** $1 + 2^{x} + 2^{2x+1} = y^{2}$ **.**

Corrigé

On peut remarquer que si $(x;y)$ est solution alors $(x;-y)$ est aussi une solution car $(-y)^2 = y^2$.

1° Pour $x=0$ on a $1+2^0+2^{2\times 0+1} = y^2 \Leftrightarrow 4 = y^2 \Leftrightarrow y=2$ ou $y=-2$

Donc les couples $(0;2)$ et $(0;-2)$ sont des solutions de l'équation.

2° Soit $A(x) = 1+2^x+2^{2x+1}$.

On a $A(1)=11$ $A(2)=37$, ces deux nombres ne sont pas des carrés parfaits donc $A(1)=y^2$ et $A(2)=y^2$ n'ont pas de solution, d'où $x \geq 3$.

L'équation $1+2^x+2^{2x+1} = y^2$ est équivalente à

$2^x(2^{x+1}+1) = y^2-1 = (y-1)(y+1)$. En plus

$2^x+2^{2x+1} = 2^x(2^{x+1}+1)$ est divisible par 2 donc y est impair.

Posons alors $y=2n+1$, dans ce cas l'équation va s'écrire

$2^x(2^{x+1}+1) = 4n(n+1)$. Comme $2^x \wedge (2^{x+1}+1)=1$ et $n \wedge (n+1)=1$ alors 2^x divise $4n$ ou $4(n+1)$.

<u>1^er cas</u> : Si 2^x divise $4n$ alors soit p leur quotient on a

$p = \dfrac{4n}{2^x} = \dfrac{2^{x+1}+1}{n+1} \Rightarrow 2^{x+1}+1 = p(n+1) = pn+p$. En multipliant par

4 on trouve $4\left(2^{x+1}+1\right)=p(4n+4)=p\left(p.2^{x}+4\right)$ c'est-à-dire que

$$p^{2}.2^{x}+4p=8.2^{x}+4\Rightarrow\left(p^{2}-8\right).2^{x}=4\left(1-p\right)\Rightarrow 2^{x}=\frac{4\left(1-p\right)}{p^{2}-8}.$$

Comme $x\geq 3$ alors $2^{x}\geq 8$, d'où $\dfrac{4\left(1-p\right)}{p^{2}-8}\geq 8$. Cette inégalité montre que $1-p$ et $p^{2}-8$ sont de même signe, ce qui ne peut se réaliser que si $\begin{cases}1\leq p\\ p^{2}<8\end{cases}\Rightarrow p=1$ ou $p=2$. $p=1\Rightarrow 0\geq 8$ et $p=2\Rightarrow 1\geq 8$, les deux cas sont impossibles.

Alors 2^{x} ne divise pas $4n$.

<u>2^e cas</u> : Si 2^{x} divise $4\left(n+1\right)$. Soit p leur quotient on a

$$p=\frac{4(n+1)}{2^{x}}=\frac{2^{x+1}+1}{n}\Rightarrow 2^{x+1}+1=pn\Rightarrow$$
$$8.2^{x}+4=4np=p\left(p.2^{x}-4\right)=p^{2}.2^{x}-4p$$

D'où $2^{x}=\dfrac{4\left(p+1\right)}{p^{2}-8}$ et encore $\dfrac{4\left(1+p\right)}{p^{2}-8}\geq 8\Rightarrow\dfrac{1+p}{p^{2}-8}\geq 2$ on a

$\begin{cases}p\leq -1\\ p^{2}<8\end{cases}\Rightarrow p=-1$ ou $p=-2$ dans les deux cas il y a une

contradiction, ou $\begin{cases} p > -1 \\ p^2 > 8 \end{cases} \Rightarrow p = 0$ ou $p = 1$ ou $p = 2$ ou $p = 3$, les trois premiers cas sont rejetés, le seul cas accepté est $p = 3$ qui donne $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$

et comme $3 = p = \dfrac{4(n+1)}{2^x} = \dfrac{n+1}{4} \Rightarrow n = 11$, d'où $y = 23$.

Conclusion :

Les couples d'entiers (x, y) solutions de l'équation $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ sont seulement $(0;2), (0;-2), (4;23)$ et $(4;-23)$

*Exercice 3 :

On considère l'intégrale : $\varphi(x) = -\int_0^x \ln(\cos y)\,dy$, pour $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

1° Montrer que : $\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x\ln 2$.

2° En prolongeant φ par continuité en $\frac{\pi}{2}$ trouer alors la valeur exacte de $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Corrigé

1° Soit $f(x)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-x\ln 2$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

φ **est la primitive sur** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ **qui s'annule en 0 de la fonction**

$x\mapsto -\ln(\cos x)$. **Donc** φ **est dérivable sur** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ **et**

$\varphi'(x)=-\ln(\cos x)$. **De même f est dérivable sur** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ **et**

$$\begin{aligned} f'(x)&=\varphi'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\varphi'\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\ln 2\\ &=-\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)+\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)+\ln 2\right]\end{aligned}.$$

D'où $f'(x)=-\ln\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]=-\ln(\cos x)=\varphi'(x)$.

Comme en plus $\varphi(0)=f(0)=0$, **alors on a** $\varphi(x)=f(x)$.

Ce qui montre que $\varphi(x)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-x\ln 2$.

2° Le prolongement par continuité donne que

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\ln 2=2\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\ln 2\Rightarrow \boxed{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\ln 2}$$

Exercice 4 :

1° Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2° Trouver l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ solutions du système :

$$\begin{cases} x^5-10x^3y^2+5xy^4=8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \\ 5x^4y-10x^2y^3+y^5=8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

Corrigé

1° $e^{i\frac{5\pi}{12}}=e^{\frac{2i\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

D'où $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2° On sait que $\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et

$\cos\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

En plus

$$\begin{aligned}(x+iy)^5 &= x^5+5x^4yi-10x^3y^2-10x^2y^3i+5xy^4+iy^5\\ &= x^5-10x^3y^2+5xy^4+i(5x^4y-10x^2y^3+y^5)\end{aligned}$$

Pour le système $\begin{cases} x^5-10x^3y^2+5xy^4=8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) & (1)\\ 5x^4y-10x^2y^3+y^5=8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) & (2)\end{cases}$

on prend $(1)+i.(2)$ **et on obtient**

$$(x+iy)^5=32\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=2^5.e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Soit $z=x+iy$ **, on a donc** $z^5=2^5.e^{i\frac{\pi}{12}}$**, dont les solutions sont les complexes** $z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$, $0\le k\le 4$

Donc $z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)\right).$

Les solutions du système sont les couples (x,y) définies par

$x=2\cos\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)$ **et** $y=2\sin\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)$ **; avec k un entier compris entre 0 et 4.**

Ces couples sont $\left(2\cos\frac{\pi}{60}, 2\sin\frac{\pi}{60}\right)$; $\left(2\cos\frac{25\pi}{60}, 2\sin\frac{25\pi}{60}\right)$;

$\left(2\cos\frac{49\pi}{60}, 2\sin\frac{49\pi}{60}\right)$; $\left(2\cos\frac{73\pi}{60}, 2\sin\frac{73\pi}{60}\right)$ **et**

$\left(2\cos\frac{97\pi}{60}, 2\sin\frac{97\pi}{60}\right)$.

Exercice 5 :

Un octogone convexe $A_1A_2A_3...A_8$ est inscrit dans un cercle de rayon non nul. $A_1A_3A_5A_7$ est un carré d'aire égale à 5 ; $A_2A_4A_6A_8$ est un rectangle d'aire égale à 4. Déterminer, en justifiant, l'aire maximale de l'octogone.

Corrigé

Calcul préliminaire :

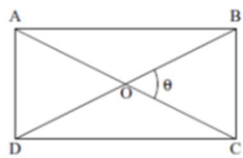


figure 1

Le côté d'un carré d'aire 5 mesure $\sqrt{5}$ et sa demi-diagonale $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Un rectangle d'aire 4 et de diagonale $2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}$ a des côtés de dimensions a et b tels que $ab=4$ et $a^2+b^2=10$ d'où

$(a+b)^2=18$ et $(a-b)^2=2$. Ce qui donne $a=2\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{2}$.

L'angle $\widehat{BOC}=\theta$ est tel que $\sin\theta=\frac{4}{5}$ et $\cos\theta=\frac{3}{5}$ donc

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

1° Méthode Géométrique :

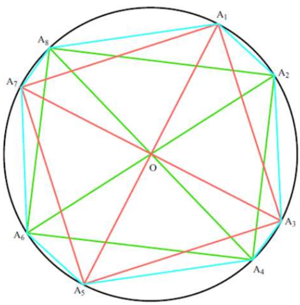


figure 2

L'aire de l'octogone est la somme des aires :

- du rectangle $A_2A_4A_6A_8$ égale à 4
- des quatre triangles $A_8A_1A_2$, $A_2A_3A_4$, $A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$

Commençons par démontrer que si un point A décrit un arc de cercle $\overset{\frown}{BC}$, l'aire du triangle BAC

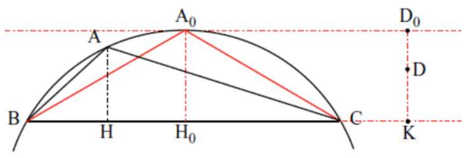


figure 3

est maximum quand A_0 est au milieu de l'arc. En effet, abaissons de A et A_0 les perpendiculaires (AH) et (A_0H_0) à la droite (BC) et traçons la tangente à l'arc en A_0. Pour tout point de D de la bande fermée limitée par cette tangente et la droite (BC), on a $DK \leq D_0K = A_0H_0$. En particulier, $AH \leq A_0H_0$, l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0. Mais l'aire du triangle BAC est égale à $\frac{BC \times AH}{2}$ et on a $\frac{BC \times AH}{2} \leq \frac{BC \times A_0H_0}{2}$ l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0 (figure 3)

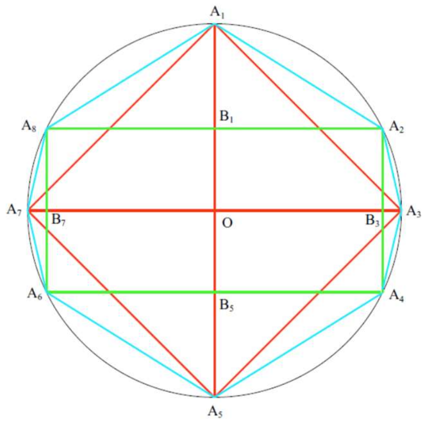


figure 4

.

Mais (cf. figure 2) A_1A_5 et A_3A_7 sont les diagonales d'un carré et donc perpendiculaires ;

si A_3 est au milieu de l'arc $\overset{\frown}{A_2A_4}$, A_1 se trouve au milieu de l'arc $\overset{\frown}{A_2A_8}$ de sorte qu'on maximise en même temps l'aire des

deux triangles $A_8A_1A_2$ et $A_2A_3A_4$ donc aussi celles de $A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$ voire figure 4.

L'aire de l'octogone est alors :

$$\begin{aligned} A &= 4 + A_2A_8 \times A_1B_1 + A_2A_4 \times A_3B_3 \\ &= 4 + a\left(R - \frac{b}{2}\right) + b\left(R - \frac{a}{2}\right) \\ &= 4 + R(a+b)\text{-}ab \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

2° <u>Méthode Analytique</u>

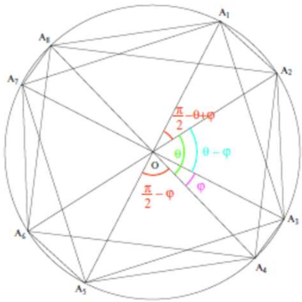


figure 5

Posons (cf. figure 5)

$\angle A_3OA_4 = \varphi$, $\angle A_2OA_4 = \theta$ **donc** $\angle A_2OA_3 = \theta - \varphi$ **. De**

$\angle A_3OA_1 = \angle A_3OA_5 = \frac{\pi}{2}$**, on déduit** $\angle A_1OA_2 = \frac{\pi}{2} - \theta + \varphi$ **et**

$\angle A_4OA_5 = \frac{\pi}{2} - \varphi$ **.**

L'aire de l'octogone est la somme des aires des huit triangles :

A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, A_4OA_5, A_5OA_6, A_6OA_7, A_7OA_8,

A_8OA_1 **qui sont égales deux à deux en raison de la symétrie de l'octogone par rapport à O. L'aire du triangle** A_iOA_{i+1} **est égale à**

$\frac{R^2}{2}\sin\left(\angle A_iOA_{i+1}\right)$**. Celle de l'octogone est donc**

$$S = R^2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\varphi\right)+\sin\left(\theta-\varphi\right)+\sin\varphi+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$$
$$= R^2\left[\cos\left(\theta-\varphi\right)+\sin\left(\theta-\varphi\right)+\sin\varphi+\cos\varphi\right]$$

Et quand A_3 **décrit l'arc** $\overset{\frown}{A_4A_2}$, φ **varie de 0 à** θ**.**

Posons $f(\varphi)=\cos\left(\theta-\varphi\right)+\sin\left(\theta-\varphi\right)+\sin\varphi+\cos\varphi$ **, f est dérivable sur** $[0;\theta]$ **de dérivée** f' **donnée par**

$f'(\varphi)=\sin\left(\theta-\varphi\right)-\cos\left(\theta-\varphi\right)+\cos\varphi-\sin\varphi$ **,** f' **s'annule pour**

$$\varphi=\frac{\theta}{2}$$

Si $0\le\varphi<\frac{\theta}{2}$, $\theta-\varphi>\varphi$, $\sin(\theta-\varphi)>\sin\varphi$, $\cos(\theta-\varphi)<\cos\varphi$ **doc**

$f'(\varphi)>0$**. De même si** $\frac{\theta}{2}<\varphi\le\theta$, $f'(\varphi)<0$**. Doc f passe par un**

maximum pour $\varphi=\frac{\theta}{2}$**. L'aire de l'octogone est alors**

$$2R^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)=2\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

3° Méthode trigonométrique :

Nous partons de l'expression de l'aire de l'octogone obtenue ci-dessus

$$R^2\left[\cos(\theta-\varphi)+\sin(\theta-\varphi)+\sin\varphi+\cos\varphi\right].$$

On peut écrire

$$\sin\varphi+\cos\varphi=\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right]=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$$ **et**

$$\cos(\theta-\varphi)+\sin(\theta-\varphi)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta-\varphi\right)$$

L'aire s'écrit alors

$$R^2\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta-\varphi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\right]=\frac{5\sqrt{2}}{2}\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos(2\varphi-\theta)\right]$$

La valeur maximale de $\cos(2\varphi-\theta)$ est 1 et elle est atteinte lorsque $\varphi=\frac{\theta}{2}$. L(aire maximale est donc

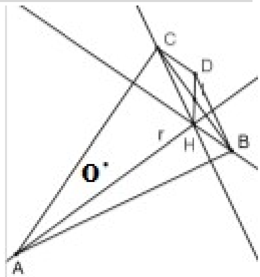
$$5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=5\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)=3\sqrt{5}$$

Exercice 1

Soit ABC un triangle acutangle (à angles aigus) tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et H son orthocentre. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par D le symétrique de H par rapport à I.

Montrer que $AD=2BC$.

Corrigé



On remarque que $BDCH$ est un parallélogramme, donc $(BD)\parallel(CH)$ et $(CD)\parallel(BH)$. On a aussi $(AB)\perp(CH)$ et $(BH)\perp(AC)$. On en déduit que les triangles ACD et ABD sont rectangles de même hypoténuse $[AD]$ donc les points A,B,C et D sont cocycliques. Le centre du cercle circonscrit aux points A,B,C et D est milieu O de $[AD]$. D'autre part l'angle au centre $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ est le double de l'angle inscrit $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Comme $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ alors $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On trouve que $\begin{cases} \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ OB = OC \end{cases}$ ce qui veut dire que le triangle OBC est équilatéral. On a donc $BC = OC = OB = \frac{1}{2}AD$.

Exercice 2

Un commerçant effectue trois remises successives sur un boubou dont le prix initial était de 30000 Ouguiyas et le vend finalement à 22287 Ouguiyas. Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de valeurs entières distinctes ? On donne : $742900 = 17 \times 19 \times 23 \times 2^2 \times 5^2$

Corrigé

Soient *a; b; c* les trois pourcentages tels que $a < b < c$. On a donc :

$$30000\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)\left(1 - \frac{c}{100}\right) = 22287 \Leftrightarrow$$

$$3(100 - a)(100 - b)(100 - c) = 2228700$$

$$\Leftrightarrow (100 - a)(100 - b)(100 - c) = 742900$$

$$\Leftrightarrow (100 - a)(100 - b)(100 - c) = 17 \times 19 \times 23 \times 2^2 \times 5^2.$$

Les entiers $(100 - a)$, $(100 - b)$ et $(100 - c)$ sont tous les trois inférieurs à 100 et supérieur 74,29 donc à 75.

Comme $17\times19>100$ d'où l'existence de trois entiers p,q,p',q',p'' et q'' tels que $100-a=17\times2^{p}\times5^{q}$, $100-b=19\times2^{p'}\times5^{q'}$ et $100-c=23\times2^{p''}\times5^{q''}$ avec $p+p'+p''=2$ et $q+q'+q''=2$.

$75\le100-a\le100\Leftrightarrow\dfrac{75}{17}\le2^{p}\times5^{q}\le\dfrac{100}{17}$ d'où $4,4\le2^{p}\times5^{q}\le5,9$ donc

$2^{p}\times5^{q}=5$ on en déduit que $p=0$ et $q=1$; on a aussi

$\dfrac{75}{23}\le2^{p''}\times5^{q''}\le\dfrac{100}{23}$ d'où $3,2\le2^{p'}\times5^{q'}\le4,3$ donc $2^{p''}\times5^{q''}=4$ on en

déduit que $p''=2$ et $q''=0$. Or en remplaçant dans $p+p'+p''=2$ et $q+q'+q''=2$ on trouve $p'=0$ et $q'=1$. Donc $a=100-17\times5=15$; $b=100-19\times5=5$ et $c=100-23\times4=8$.

Le candidat peut remarquer que

$(100-a)\ (100-b)\ (100-c)=\left(\underbrace{23\times4}_{<100}\right)\times\left(\underbrace{5\times17}_{<100}\right)\times\left(\underbrace{5\times19}_{<100}\right)$ et en déduire

les pourcentages.

Enfin les pourcentages des trois remises appliquées sont 15% , 5% et 8% (l'ordre n'est pas important)

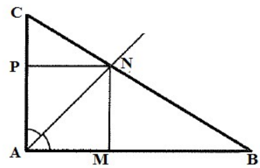
Exercice 3

Etant donné un triangle ABC rectangle en A, on note $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$. On veut construire deux carrés inscrits dans ce triangle : Le premier ayant A pour sommet et le second ayant un côté porté par l'hypoténuse.

1) Construire les deux cas de figure en expliquant les étapes de la construction.

2) Exprimer les côtés x et y de ces deux carrés en fonction de b et c puis comparer leurs aires.

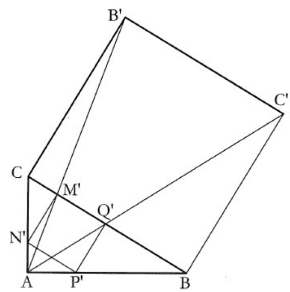
Corrigé



1) Construire les deux cas de figure en expliquant les étapes de la construction.

- 1er cas on utilise la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{2}$ (voir figure). Les triangles AMN et APN sont rectangles et isocèles respectivement en M et en P.

- 2ième cas on utilise le carré extérieur $BCB'C'$ de côté BC et l'homothétie de centre A et qui transforme B' en M' et B en P' (voir figure). Le carré $BCB'C'$ est transformé en $M'N'P'Q'$



2) Exprimer les côtés x et y de ces deux carrés en fonction de b et c puis comparer leurs aires.

*** Calcule de x : l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles PNC, MBN et celle du carré $AMNP$ on a donc :**

$$\frac{bc}{2} = \frac{(b-x)x}{2} + \frac{(c-x)x}{2} + x^2 \text{ d'où } x = \frac{bc}{b+c}.$$

*** Calcule de y : l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles $AP'N'$, $P'BQ'$, $N'M'C$ et celle du carré $N'P'Q'M'$. Les triangles $AP'N'$ est l'image de ABC par l'homothétie donc $\text{aire}(AP'N') = \left(\frac{y}{a}\right)^2 \times \text{aire}(ABC)$. Les triangles $P'BQ'$ et $N'M'C$ ont la même hauteur donc**

$$\text{aire}(P'BQ') + \text{aire}(N'M'C) = \frac{1}{2}y(CM' + Q'B) = \frac{1}{2}y(a-y) \text{ donc}$$

$$\frac{bc}{2} = \frac{bc}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}y(a-y) + y^2.$$

$$\frac{bc}{2} = \frac{bc}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}y(a-y) + y^2 \Leftrightarrow (bc+a^2)y^2 + a^3y - a^2bc = 0$$

En calculant le discriminant

$$\Delta = a^6 + 4(bc+a^2)a^2bc = a^2(a^4 + 4bc(bc+a^2)) = (b^2+c^2)(b^2+c^2+2bc)^2$$

d'où $\Delta = (b^2+c^2)(b+c)^4 > 0$ donc l'équation a pour solution positive

$$y = \frac{-a^3 + (b+c)^2\sqrt{b^2+c^2}}{2(bc+b^2+c^2)} = \frac{-(b^2+c^2)\sqrt{b^2+c^2} + (b+c)^2\sqrt{b^2+c^2}}{2(bc+b^2+c^2)} = \frac{bc\sqrt{b^2+c^2}}{bc+b^2+c^2}$$

Enfin pour comparer les aires de ces deux carrées on fait :

$$x^2-y^2=\frac{b^2c^2}{(b+c)^2}-\frac{b^2c^2(b^2+c^2)}{(bc+\underbrace{b^2+c^2}_{a^2})^2}=b^2c^2\,\frac{(bc+a^2)^2-a^2(b+c)^2}{(b+c)^2(bc+b^2+c^2)^2}\ \text{d'où}$$

$$x^2-y^2=b^2c^2\,\frac{b^2c^2+bca^2+a^2bc+a^4-a^4-2bca^2}{(b+c)^2(bc+b^2+c^2)^2}=\frac{(bc)^4}{(b+c)^2(bc+b^2+c^2)^2}>0$$

Donc l'aire du carré ayant A pour sommet est supérieure à celle du carré ayant un côté porté par l'hypoténuse.

<u>Exercice 4</u>

Un nombre palindrome est un nombre entier non nul qui peut se lire de la même manière dans les deux sens (par exemple : 12321). Si les nombres palindromes sont rangés dans l'ordre croissant, le premier de ces nombres est 1 alors que 55 porte le numéro 14. On dit aussi que 55 est le 14$^{\text{ième}}$ nombre palindrome.

1) Quel est le 5$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?

2) Quel est le 20$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?

3) Donner le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres, puis celui du dernier nombre palindrome à 3 chiffres.

4) Un jeune mathématicien, spécialiste des nombres palindromes, protège les résultats de ses recherches dans un coffre-fort dont la combinaison comporte quatre chiffres. Pour se souvenir de la combinaison d'ouverture du coffre, le chercheur, âgé de 22 ans, utilise le seul nombre palindrome dont le quotient par son rang dans la liste des nombres palindromes est l'âge du mathématicien.

Quelle peut bien être la combinaison choisie par ce spécialiste?

Corrigé

Question 1, 2 et 3.

Liste des premiers nombres palindromes :

$$\text{9 nombres palindromes à 1chiffres} : 1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;\ \underbrace{5}_{\text{5ième}}\ ;6\ ;7\ ;8\ ;9 \leftarrow \text{9 ième}$$

$$\text{9 nombres palindromes à 2 chiffres} : 11\ ;22\ ;33\ ;44\ ;\ \underbrace{55}_{\text{14ième}}\ ;66\ ;77\ ;88\ ;99 \leftarrow \text{18 ième}$$

$$\text{90 nombres palindromes à 3 chiffres:}\begin{cases} \underbrace{101}_{\text{19ième}}\ ;111\ ;121\ ;\cdots;191 \text{ (28 ième)} \rightarrow \text{10 nombres} \\ 202\ ;212\ ;222\ ;\cdots;292 \text{ (38 ième)} \rightarrow \text{10 nombres} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ 909\ ;919\ ;929\ ;\cdots;\ \underbrace{999}_{\text{108ième}} \text{ (108 ième)} \rightarrow \text{10 nombres} \end{cases}$$

4) L'énoncé admet l'existence et l'unicité de la solution.

On peut tout d'abord essayer de dénombrer les nombres palindromes qui nous intéressent.

Il existe 9 nombres entiers (1, 2, . . . , 9) qui sont les premiers.

Puis viennent les nombres palindromes à deux chiffres, faciles à trouver comme 11, 22, . . . , 99. Il en existe 9.

Puis viennent ceux dont l'écriture possède trois chiffres, comme 101, ou bien 242. Ils ont le même chiffre des centaines et des unités. Comme on ne peut pas prendre 0, il reste 9 possibilités couplées avec les 10 cas différents du chiffre des dizaines, soit 90 nombres palindromes à trois chiffres.

Les nombres palindromes à quatre chiffres ont les chiffres des milliers et des unités identiques, mais aussi les mêmes chiffres des centaines et des dizaines.

C'est le cas de 3223, ou bien de 6776. Ils sont faciles à dénombrer, puisqu'il suffit de s'intéresser aux deux derniers chiffres.

Pour les mêmes raisons que précédemment, on ne peut pas utiliser 0 comme chiffre des unités, ce qui laisse 90 cas différents.

$$\text{90 nombres palindromes à 4chiffres:}\begin{cases}\underbrace{1001}_{\text{109ième}}\ ;1111\ ;1221\ ;\cdots;1991 \rightarrow 10\ \text{nombres}\\ \underbrace{2002}_{\text{119ième}}\ ;2112\ ;2222\ ;\cdots;2992 \rightarrow 10\ \text{nombres}\\ \vdots \\ 9009\ ;9119\ ;9229\ ;\cdots;9999 \rightarrow 10\ \text{nombres}\end{cases}$$

Nombres palindromes	**de 1 à 9**	**de 11à 99**	**de 101à 999**	**de 1001à 9999**
Effectifs	**9**	**9**	**90**	**90**
Effectifs cumulés	**9**	**18**	**108**	**198**

Finalement, les nombres qui nous intéressent sont les nombres palindromes de 1001 à 9999, c'est-à-dire ceux qui sont situés entre les places 109 et 198.

D'après l'énoncé, il faut que ces nombres palindromes soient multiples de 22.

Comme $22=2\times 11$, on recherche des multiples de 2 et de 11.

Or, tout nombre palindrome est multiple de 11.

Cela ne constitue donc pas un critère de choix.

(En effet, soit $\overline{abba}$ un nombre palindrome à quatre chiffres,

on a : $\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \times (91a + 10b)$.

Par ailleurs, les multiples de 2 se reconnaissent à leur terminaison, qui est 0, 2, 4, 6, ou 8.

On a vu qu'il n'existait pas de nombre palindrome à quatre chiffres se terminant par zéro, donc la liste des éventualités est réduite ici à 40 nombres.

Il suffit maintenant de lister les possibilités.

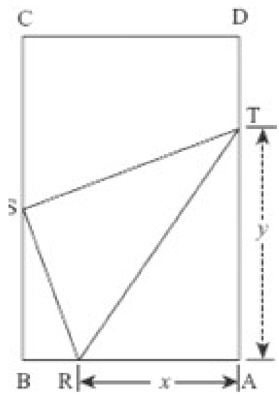
Il existe 10 nombres palindromes se terminant par 2.

Le premier 2002 porte le numéro 119 dans le classement, alors que le dernier 2992 porte le numéro 128.

Comme $119 \times 22 = 2618 > 2002$ et comme $128 \times 22 = 2816 < 2992$, on peut assurer que notre solution est l'un des nombres

2002 ; 2112 ; 2222 ; 2332 ; 2442 ; 2552 ;2662 ;2772 ;2882 ou 2992.
On vérifie qu'il s'agit de 2772, situé au 126ème rang dans la liste.

Exercice 5



Soit $ABCD$ une feuille rectangulaire de largeur $AB=4$ et de longueur $BC=6$. Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir la figure ci-contre : Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille). On pose $AR=x$ et $AT=y$.

1) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.

2) Trouver une relation entre x et y quand S se déplace sur [BC].

3) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle SRT est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?

Corrigé

1) La valeur maximale de x est évidemment 4, dans ce cas on aura aussi $y = 4$.

Pour que S existe il faut que $AS \geq 4$, or d'après l'inégalité triangulaire on a $AS < 2x$ donc $x > 2$.

Il faut que T soit sur le segment $[AD]$ donc la valeur minimale de x est obtenue lorsque T est en D. Puisque (RT) est la médiatrice de $[AS]$ alors $\widehat{RTA}=\widehat{BAS}=\alpha$.

Calculons la tangente de α de deux manières.

On obtient $\tan\alpha=\dfrac{AR}{AT}=\dfrac{SB}{AB}$ soit $\dfrac{x}{y}=\dfrac{SB}{4}$.

Dans le cas particulier où $T=D$, on a $y=6$ et d'après le théorème de Pythagore, $SB=6-\sqrt{20}$.

On obtient ainsi la valeur minimale $x=9-3\sqrt{5}$.

2) La relation précédemment établie permet de trouver une relation entre x et y car : $BR=4-x$, $SR=x$ et

$SB^2=SR^2-BR^2=x^2-(4-x)^2=8x-16$ et $SB=2\sqrt{2x-4}$. On en déduit que $y=\dfrac{2x}{\sqrt{2x-4}}$.

3) L'aire de SRT est $\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x-4}}=f(x)$. Etudions les variations de f sur $I=\left[9-3\sqrt{5},4\right]$. La fonction f est dérivable sur I et

$f'(x)=\dfrac{2x\sqrt{2x-4}-\dfrac{2}{2\sqrt{2x-4}}x^2}{2x-4}$, soit encore $f'(x)=\dfrac{x(3x-8)}{(2x-4)\sqrt{2x-4}}$.

On a $\dfrac{8}{3}\in I$ d'où le tableau de variations de f :

x	$9-3\sqrt{5}$		$\frac{8}{3}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{8}{3}\right)$	$\nearrow$	

La valeur minimale de l'aire du triangle SRT est $f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3\sqrt{3}}$.

Notons dans ce cas $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$ ce qui signifie que triangle AST est équilatéral.

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS

Contrôle continu 4AS

Contrôle continu 7D

Contrôle continu 7C

Rallyes de Maths 3ème

Rallyes de Maths 5ème

Rallyes de Maths 6ème

Olympiades de Maths 4ème

Olympiades de Maths 7ème

Jeux mathématiques* et *logiques

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS

Contrôle continu 4AS

Contrôle continu 7D

Contrôle continu 7C

Rallyes de Maths 3ème

Rallyes de Maths 5ème

Rallyes de Maths 6ème

Olympiades de Maths 4ème

Olympiades de Maths 7ème

Jeux mathématiques et logiques