EPREUVE DE MATHS 1er BAC BLANC

Niveau : 7C *Durée :4H* *Proposée le 27 décembre 2023 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

1) On considère les matrices : $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 2 & -3 & -2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -7\\ 6 & 0 & -6\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit $A\times B$.

b) Calculer le déterminant de A. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} en utilisant B.

2) On considère le système : $\begin{cases}-2x+2y-z=6\\ 2x-3y-2z=-6\\ -2x+y-z=0\end{cases}$.

a) Vérifier que ce système est équivalent à : $A\times\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -6\\ 0\end{pmatrix}$.

b) Trouver alors la solution de ce système en utilisant A^{-1}.

c) Résoudre, sans nouveaux calculs le système : $\begin{cases}8u+6v+2t=6\\ -8u-9v+4t=-6\\ 8u+3v+2t=0\end{cases}$.

Exercice 2 (4 points)

1.a) Donner la décomposition, en facteurs premiers, de 2023.

b) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 2023 et donner leur liste.

2) On considère l'équation (E) : $21x-13y=1$ d'inconnues (x,y) entiers relatifs.

a) Déterminer l'entier p tel que $(p,p+3)$ soit une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

3) Soit A un entier relatif qui vérifie le système (S) : $\begin{cases}A\equiv 7[21]\\ A\equiv 8[13]\end{cases}$

a) Justifier qu'il existe x, y de $\mathbb{Z}$ tels que $A=21x+7=13y+8$ où (x,y) est solution de (E)

b) Montrer que A est solution du système (S) si et seulement si $A\equiv 112[273]$.

c) Déterminer l'entier naturel B solution de (S) qui s'écrit $\overline{37a7}$ en base 8 où $0\le a\le 7$, puis préciser a.

Exercice 3 (4 points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points $A(-3+2i)$, $B(2+2i)$, et M un point variable d'affixe z.

On désigne par S_1 la similitude directe qui, au point M, associe le point M_1 d'affixe $z_1=(1+i)z+2+3i$, et par S_2 la similitude directe qui, au point M associe le point M_2 d'affixe $z_2=(1-i)z-2+2i$.

1.a) Donner les éléments caractéristiques de chacune des deux similitudes directes S_1 et S_2.

b) Montrer que $S_2\circ S_1$ est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre J.

c) Montrer que l'application f qui transforme M_1 en M_2 est une rotation, dont on précisera le centre Ω et l'angle.

2) Soit I le milieu de $[M_1M_2]$ On désigne par t l'application définie par : $t(M) = I$.

a) Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.

b) Montrer que si M_1 est distinct de Ω, alors les droites (ΩI) et (M_1M_2) sont perpendiculaires.

3.a) Montrer que pour $M \neq A$: $\dfrac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \dfrac{2\left(z + \frac{1}{2} - 2i\right)}{z + 3 - 2i}$.

b) En déduire l'ensemble des points M tels que les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

Exercice 4 (4 points) *(Dans cet exercice, traitez au choix l'une des parties A ou B)*

Partie A (Nombres complexes)	Partie B (Fonctions numériques)
Soit f l'application de $E = \mathbb{C}\setminus\{-i\}$ dans $F = \mathbb{C}\setminus\{i\}$ qui à tout z associe $f(z) = \dfrac{iz}{z+i}$. 1) Montrer que l'application f est une bijection, donner sa bijection réciproque; puis vérifier que : $\forall z \in F,\quad f^{-1}(z) = -f(-z)$ 2) Démontrer que, si $f(z) = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$, alors $z = \dfrac{1}{2}\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) - i\right)$ 3.a) Donner la forme exponentielle des solutions de m'équation $Z^6 = 1$ b) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation : $(iz)^6 = 32(1 + i\sqrt{3})(z+i)^6$.	On considère la fonction f définie sur]-1;1[par : $h(x) = -1 + \cot\left(\dfrac{\pi}{2}(x+1)\right)$ 1) Montrer que h réalise une bijection de]-1;1[sur $\mathbb{R}$. 2) Soit g la réciproque de h. Montrer que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-2}{\pi\left((x+1)^2 + 1\right)}$. 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = g(x-1) + g\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$. a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'(x). b) En déduire que f est constante sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$. c) Calculer $f(\frac{-1}{2})$ et $f(\frac{1}{2})$ puis préciser l'expression de f(x) sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - 7iz^2 - (16+2i)z - 6 + 12i$

a) Calculer $P(3i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $P(z) = 0$.

2.a) Placer les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.

b) Donner l'expression complexe de la similitude directe f de centre B qui transforme A en C.

c) Déterminer le rapport de f.

d) Soit θ un angle de f. Montrer que $\cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

3) On considère le point $M_0(1,4)$, et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f(M_n)$. Soit z_n l'affixe du point M_n.

a) Soit $M_1 = f(M_0)$. Vérifier, en utilisant l'expression de f, que l'affixe de M_1 est $z_1 = \dfrac{-3}{5} + \dfrac{16}{5}i$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 3i + \left(\dfrac{-1+2i}{5}\right)^n (1+i)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_{n-1}M_n$.

Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Fin.