Corrigé du bac c 2016 Session normale

Par Mokhtar Baba Hamdi

Exercice 1 :

$$5x - 3y = 17 \quad (E)$$

1. a) Existence des solutions entières de (E) :

On sait que 5 et 3 sont des nombres premiers distincts, donc ils sont premiers entre eux, c'est-à-dire que $PGCD(5,3) = 1$. Et comme 1 divise 17 alors (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

D'autre part : $5 \times 4 - 3 \times 1 = 20 - 3 = 17$, ce qui signifie que le couple $(4,1)$ est une solution particulière de (E).

b) Résolution de (E) :

Si (x, y) est une solution générale de (E), alors : $5x - 3y = 17$.

Et comme : $5 \times 4 - 3 \times 1 = 17$. Alors par soustraction :

$$5(x-4) - 3(y-1) = 0$$

$$\Rightarrow 5(x-4) = 3(y-1) \quad (*)$$

Donc 3 divise $5(x-4)$.

Or $PGCD(3,5) = 1$, alors d'après Gauss 3 divise $(x-4)$.

Donc il existe un entier relatif k tel que : $x - 4 = 3k$, c'est-à-dire :

$$x = 3k + 4$$

En injectant cette valeur de x dans la relation $(*)$, on obtient :

$$5 \times 3k = 3(y-1)$$

Ce qui implique que :

$$y = 5k + 1$$

Réciproquement :

Si $x = 3k + 4$ et $y = 5k + 1$ avec k un entier relatif, alors :

$$5x - 3y = 5 \times 3k + 5 \times 4 - 3 \times 5k - 3 \times 1 = 5 \times 4 - 3 \times 1 = 17$$

Et ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S = \{(3k+4, 5k+1); k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. (x, y) est une solution de (E).

a) Montrons que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17 :

si x est un diviseur de y, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y = kx$.

Mais comme (x, y) est une solution de (E), alors :

$$5x - 3y = 17$$

$$\Rightarrow 5x - 3kx = 17$$

$$\Rightarrow x(5 - 3k) = 17$$

Ce qui implique que x est un diviseur de 17.

Ainsi, si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.

b) m est un entier relatif. Trouvons les valeurs de m pour lesquelles le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ est un entier relatif :

Soit $m \in \mathbb{Z}$, alors le couple $(4 + 3m, 1 + 5m)$ est une solution de (E).

Si le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ est un entier relatif, alors $(4 + 3m)$ divise $(1 + 5m)$, ce qui implique, d'après la question 2. a), que : $(4 + 3m)$ divise 17.

Or les diviseurs de 17 sont : -17, -1, 1 et 17, alors l'un des cas ci-dessous se pose :

$4 + 3m = 17 \Rightarrow 3m = 13$: impossible car m est un entier relatif.

$4 + 3m = -1 \Rightarrow 3m = -5$: impossible car m est un entier relatif.

$4+3m=1 \Rightarrow 3m=-3 \Rightarrow m=-1$: pour cette valeur de m, le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}=\frac{1-5}{4-3}=-4$ est bien un entier relatif.
$4+3m=-17 \Rightarrow 3m=-21 \Rightarrow m=-7$: pour cette valeur de m, le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}=\frac{1-35}{4-21}=2$ est bien un entier relatif.
Ainsi, le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ est un entier relatif si, et seulement si : $\boxed{m \in \{-7,-1\}}$.

Exercice 2 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

$$P(z)=z^3-(4+8i)z^2+(-14+24i)z+32+4i$$

1. a) Calcul de $P(2i)$ et factorisation de $P(z)$:

$$\begin{aligned} P(2i) &= (2i)^3-(4+8i)(2i)^2+(-14+24i)(2i)+32+4i \\ &= -8i+16+32i-28i-48+32+4i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ceci montre que $2i$ est une racine de P, et par suite $P(z)$ est factorisable par $(z-2i)$.
Utilisons le tableau de Horner pour factoriser $P(z)$:

	1	$-4-8i$	$-14+24i$	$32+4i$
$2i$	$\downarrow$	$2i$	$12-8i$	$-32-4i$
	1	$-4-6i$	$-2+16i$	0

Ainsi :

$$\boxed{P(z)=(z-2i)(z^2-2(2+3i)z-2+16i)}$$

b) Résolution de l'équation $P(z)=0$:
Comme : $P(z)=(z-2i)(z^2-2(2+3i)z-2+16i)$, alors :

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-2i=0 \quad (1) \\ ou \\ z^2-2(2+3i)z-2+16i=0 \quad (2) \end{cases}$$

L'équation $(1) \Leftrightarrow z=2i$
Le discriminant réduit de l'équation (2) est :

$$\Delta'=(2+3i)^2+2-16i=4-9+12i+2-16i=-3-4i$$

Soit $\delta=a+ib$ une racine carré complexe de Δ', alors :

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a^2-b^2=-3 \\ 2ab=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2=2 \\ b=\dfrac{-4}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \text{ et } b=-2 \\ ou \\ a=-1 \text{ et } b=2 \end{cases}$$

Donc :

$$\Delta'=(1-2i)^2$$

Ses solutions sont alors :

$$\begin{cases} z'=2+3i-1+2i=1+5i \\ z''=2+3i+1-2i=3+i \end{cases}$$

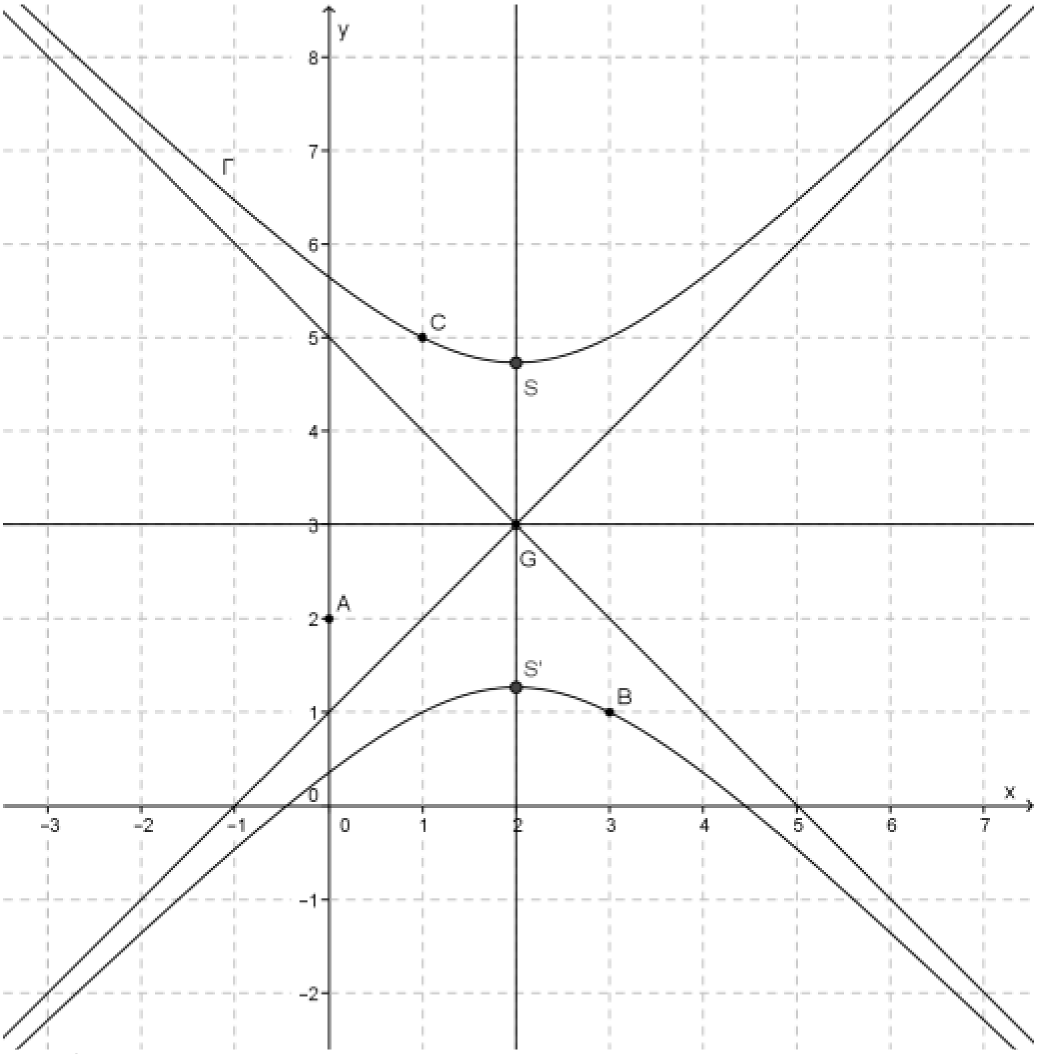
Comme : $|z|=|2i|=2$, $|z'|=|1+5i|=\sqrt{26}$ et $|z''|=|3+i|=\sqrt{10}$, donc : $|z|<|z''|<|z'|$, et par suite l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$ est alors (avec les notations de l'énoncé) :

$$\boxed{S=\{2i,3+i,1+5i\}}$$

c) $A(z_1=2i)$, $B(z_2=3+i)$ et $C(z_3=1+5i)$.
Déterminons l'affixe du point $G=bar\{(O,5);(A,-7);(C,4)\}$:

$$z_G = \frac{5z_O - 7z_A + 4z_C}{2} = \frac{5 \times 0 - 7 \times 2i + 4(1+5i)}{2} = 2 + 3i$$

Figure :



2. $Q(z) = z^2 - (4+6\mathrm{i})z - 2 + 16i$. $\Gamma = \{M(z) | Q(z) \in i\mathbb{R}\}$.

a) Equation cartésienne de Γ :

$$M(z = x + iy) \in \Gamma \Leftrightarrow Q(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\big(Q(z)\big) = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} Q(z) = Q(x+iy) &= (x+iy)^2 - (4+6\mathrm{i})(x+iy) - 2 + 16i \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy - 4x + 6y - 6ix - 4iy - 2 + 16i \\ &= x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 + i(2xy - 6x - 4y + 16) \end{aligned}$$

Donc :

$$M(z = x + iy) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$$

D'où une équation cartésienne de Γ est :

$$\boxed{\Gamma:\quad x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 = 0}$$

Montrons que Γ est une conique de centre G :

$$\begin{aligned} & x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - 4x) - (y^2 - 6y) - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 6y + 9) - 2 - 4 + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2 - (y-3)^2 = -3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{(y-3)^2}{(\sqrt{3})^2}=1$$

D'où Γ est une hyperbole de centre $G(2,3)$ et d'axe focal $(G,\vec{v})$.

b) Précisons les sommets et l'excentricité de Γ :

L'équation de Γ est de la forme :

$$-\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

Avec : $a=b=\sqrt{3}$.

Donc les sommets de Γ ont pour coordonnées : $\boxed{S(2,3+\sqrt{3})}$ et $\boxed{S'(2,3-\sqrt{3})}$.

Et son excentricité est : $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$. Soit : $\boxed{e=\sqrt{2}}$.

Pour la construction voire la figure précédente.

Exercice 3 :

1. f est la fonction définie sur ℝ par :

$$\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} \quad si \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Montrons que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ et que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$:

On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to -\infty} e^t=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} x=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

Et :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$$

Interprétations :

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0=f(0)\Rightarrow f$ est continue à gauche en 0.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\Rightarrow$ la droite d'équation $x=0$ est A.V. à (C).

b) Calcul et interprétation des limites : $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to -\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)$ et $\lim_{x\to +\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)$:

On a :

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to -\infty} e^t=0\Rightarrow f$ est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=0$. La courbe (C) admet, alors, à gauche de son point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

D'autre part, on a :

$$\lim_{x\to -\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)=\lim_{x\to -\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1\right)=\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)=1-1=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)=\lim_{x\to +\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1\right)=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)=1-1=0$$

Alors la droite d'équation $y=x+1$ est A.O. à (C) au voisinage de l'infini.

c) Dressons le T.V. de f :

On sait que : $\lim_{x\to -\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)=0$, donc : $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}(x+1)=-\infty$.

De même, comme : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=0$, alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)=+\infty$.

D'autre part, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{x}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\frac{x-1}{x}$.

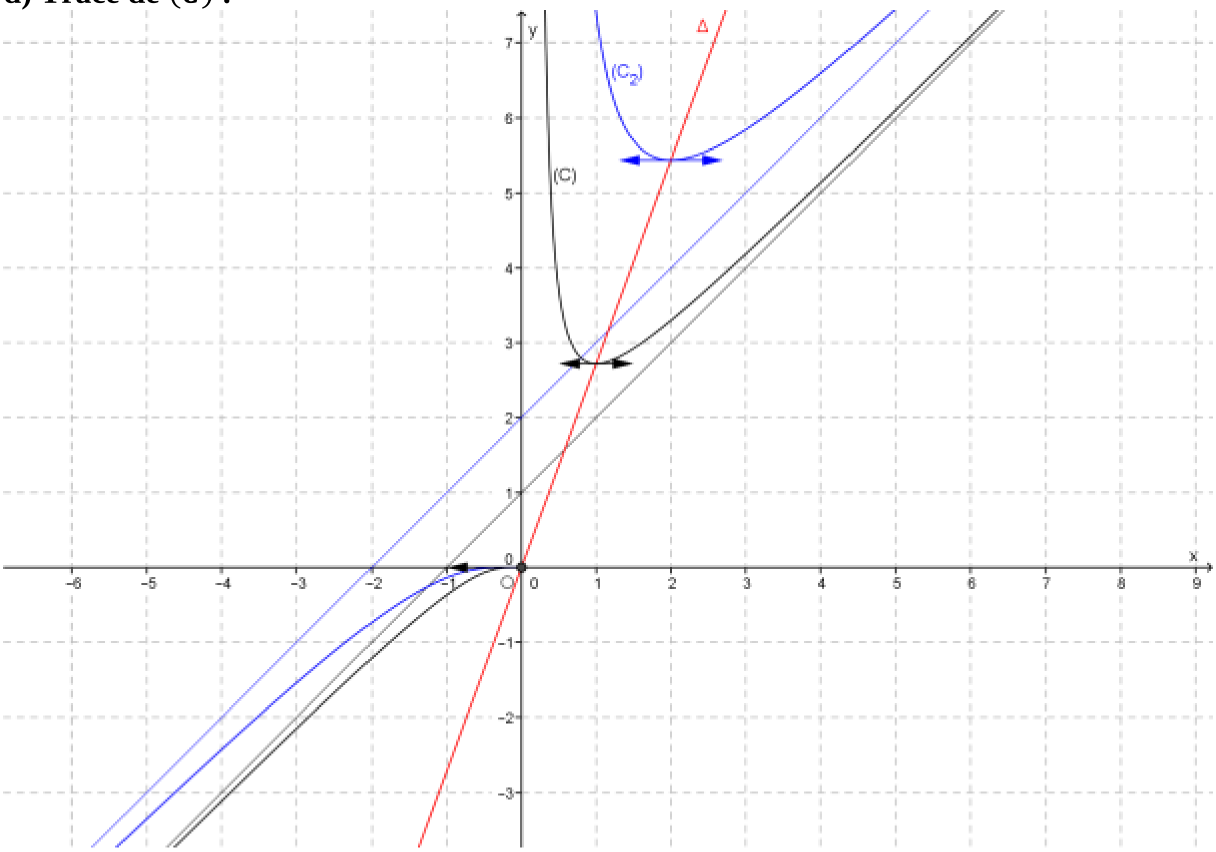
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

le T.V. de f est alors :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0 \Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

d) Tracé de (C) :



2. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(x)=xe^{\frac{n}{x}} & si \quad x\neq 0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

(C_n) est la courbe de f_n dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ précédent.

a) Montrons que (C_n) est l'image de (C) par une homothétie h_n de centre O dont on précisera le rapport :

(C_n) est l'image de (C) par une homothétie h_n de centre O et de rapport k si, et seulement si :

$$M(x,y) \in (C) \Leftrightarrow M'(x',y') = h_n(M) \in (C_n)$$

C'est-à-dire que :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y' = f_n(x')$$

Or :

$$M' = h_n(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

Donc on doit avoir :

$$y = f(x) \Leftrightarrow ky = f_n(kx)$$

C'est-à-dire que :

$$kf(x) = f_n(kx)$$

Ce qui équivaut à :

$$kxe^{\frac{1}{x}} = kxe^{\frac{n}{kx}}$$

Ce qui signifie que :

$$e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{n}{kx}}$$

D'où par identification :

$$\frac{n}{k} = 1 \Leftrightarrow k = n$$

Ainsi, (C_n) est l'image de (C) par l'homothétie h_n de centre O et de rapport n.

b) Montrons que les points M_n de (C_n) où la tangente est horizontale sont situés sur une même droite Δ dont on donnera une équation :

Soit $M(1,e)$ le point de (C) où la tangente est horizontale. Comme la courbe (C_n) est l'image de (C) par l'homothétie h_n, alors le point M_n de (C_n) où la tangente est horizontale est le image de M par l'homothétie h_n. Les coordonnées de M_n sont alors :

$$\begin{cases} x_n = n \\ y_n = ne \end{cases} \Rightarrow y_n = ex_n$$

D'où M_n appartient à la droite Δ d'équation : $y = ex$.

Ainsi, tous les points M_n sont situés sur cette droite Δ.

c) Déduction du T.V. de f_2 :

On a pour tout réel x :

$$f_2(2x) = 2f(x)$$

Donc le T.V. de f_2 se déduit du T.V. de f en multipliant les x est leurs images par 2.

Ainsi, le T.V. de f_2 est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0 ‖	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	$2e$	↗	$+\infty$

Tracé de (C_2) :

Voire la figure précédente.

Exercice 4 :

f est la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a) Montrons que $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:
On a :

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x+1} = \frac{0+1}{0^+} = +\infty$$

Et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right) = +\infty - 1 = +\infty$$

Calculons $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$
$$= 0\times 1 - 0 = 0$$

Interprétations :
$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ la droite d'équation $x = -1$ est A.V. à (C).

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\end{cases} \Rightarrow (C) \text{ admet au voisinage de } +\infty \text{ une B.P. de direction } (Ox).$$

b) Dressons le T.V. de f :
f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall x\in]-1,+\infty[\,, f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de x.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

le T.V. de f est alors :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

c) Montrons que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées :
f est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

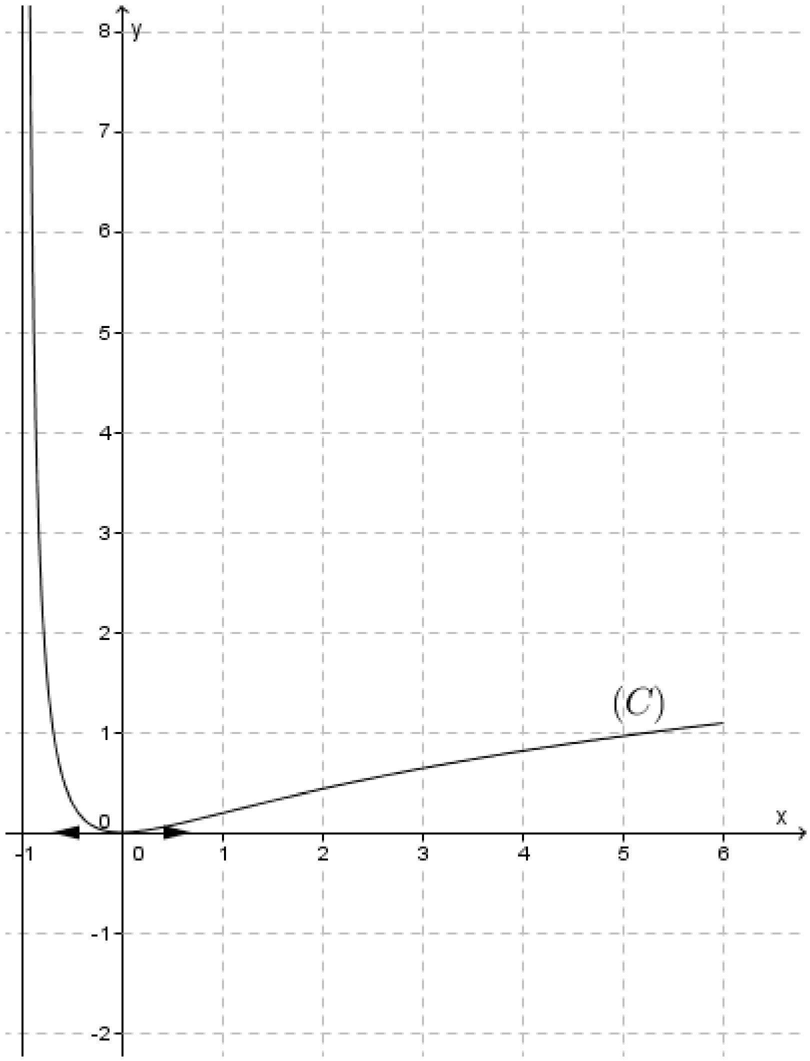
$$\forall x\in]-1,+\infty[\,, f''(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1-2x)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$(x+1)^3$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	||	$+$	0	$-$	

D'où $f''(x)$ s'annule et change de signe en $x = 1$, ce qui implique que le point $A\big(1, f(1)\big)$ est un point d'inflexion de (C).
Ainsi, le point $A\left(1, \ln(2) - \frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion de (C).

d) Tracé de la courbe (C) :



b) Calculons $\int_0^x \ln(1+t)\,dt$:

Effectuons une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \ln(1+t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{1+t} \\ v(t) = 1+t \end{cases}$$

Donc :

$$\int_0^x \ln(1+t)\,dt = [(1+t)\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x dt$$
$$= [(1+t)\ln(1+t) - t]_0^x$$
$$= (1+x)\ln(1+x) - x$$

Déterminons la primitive F de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0 :

La primitive F de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0, est donné pour tout $x \in]-1,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\ln(1+t) - \frac{t}{1+t}\right)dt$$
$$= \int_0^x \left(\ln(1+t) - \frac{1+t-1}{1+t}\right)dt$$
$$= \int_0^x \left(\ln(1+t) - 1 + \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x \ln(1+t)\,dt + [\ln(1+t) - t]_0^x \\
&= (1+x)\ln(1+x) - x + \ln(1+x) - x \\
&= (2+x)\ln(1+x) - 2x
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in\,]-1, +\infty[,\, F(x) = (2+x)\ln(1+x) - 2x}$$

b) Pour tout $n \geq 1$, A_n est l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), les axes de coordonnés et la droite d'équation $x = \frac{1}{n}$. Exprimons A_n en fonction de n :

On sait que :

$$A_n = \int_0^{\frac{1}{n}} |f(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt = [F(t)]_0^{\frac{1}{n}} = F\left(\frac{1}{n}\right) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geq 1, A_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n}}$$

3) $x \in\,]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrons que pour tout entier n :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

Soit n un entier, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} (-x)^{k-1}$$

Cette somme est la somme de $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}}$$

Ainsi ce résultat est vrai pour tout entier n.

b) Déduisons que :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

Le résultat de la question précédente est vrai pour tout $x \in\,]0,1[$, et il est simple de vérifier aussi qu'il est vrai pour $x = 0$. Donc :

$$\forall t \in [0,1[, \frac{1}{1+t} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} t^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

En intégrant cette relation entre 0 et x, on obtient :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \int_0^x t^{k-1} dt + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

Soit :

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt}$$

c) Montrons que :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k+\frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$$

On a :

$$f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}=\ln(x+1)-x\times\frac{1}{x+1}$$

D'où, d'après a) et b) :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt-x\left(\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1}+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}-1\right)x^k+\frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$$

Soit :

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k+\frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt}$$

d) Montrons que :

$$0\leq\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt\leq\frac{x^{n+2}}{n+2}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}&0\leq t\leq x\\&\Rightarrow 0\leq t\leq 1\\&\Rightarrow 1\leq 1+t\leq 2\\&\Rightarrow \frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+t}\leq 1\\&\Rightarrow 0\leq\frac{1}{1+t}\leq 1\\&\Rightarrow 0\leq\frac{t^{n+1}}{1+t}\leq t^{n+1}\end{aligned}$$

En intégrant cette relation entre 0 et x, on obtient :

$$\boxed{0\leq\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt\leq\frac{x^{n+2}}{n+2}}$$

e) Déduisons que :

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

On sait que :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k+\frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$$

Donc :

$$f(x)-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k=\frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$$

Or $x \in]0, 1[$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} x^{n+2} = 0$$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{x+1} = 0$ car $((-1)^{n+2})_n$ est bornée.

Et : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = 0$. Ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = 0$ d'après l'encadrement de la question d). Par suite : $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = 0$ car $((-1)^{n+2})_n$ est bornée.

Ainsi :

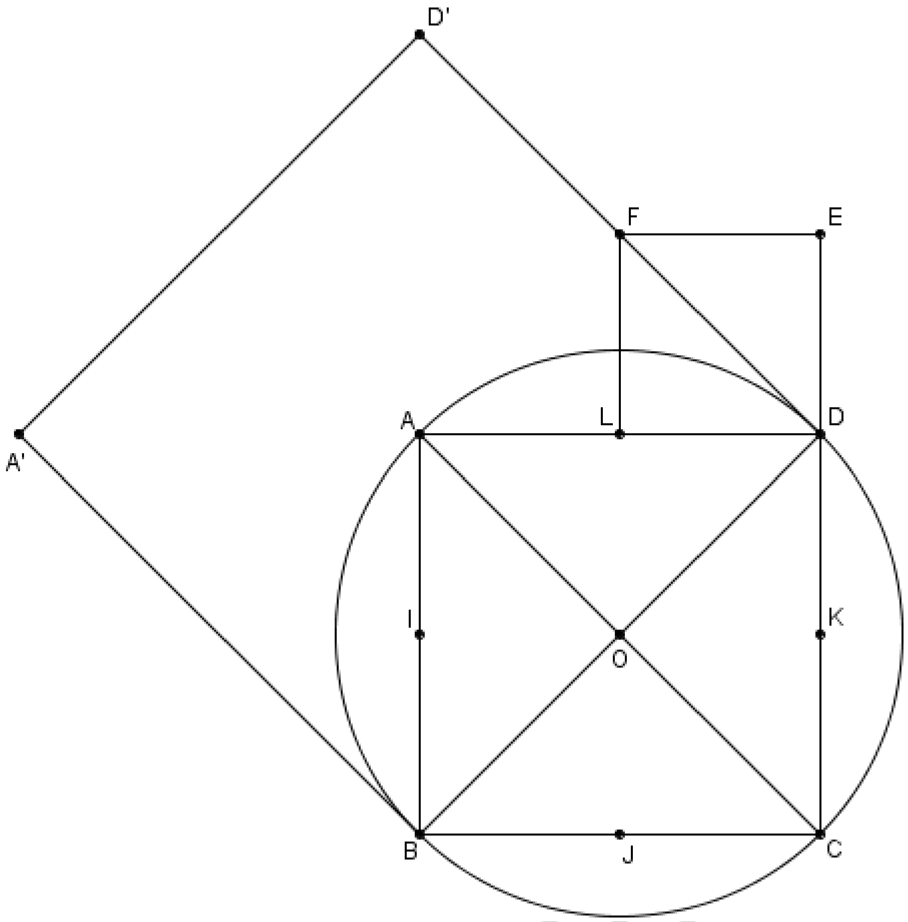
$$\lim_{n \to +\infty} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k \right) = 0$$

Ce qui est équivaut à dire que :

$$\boxed{f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}}$$

Exercice 5 :

1. a) Figure :



$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$

b) Montrons qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en D et L en E :

Comme :

$$\begin{cases} AL = DE = \dfrac{a}{2} \\ \overrightarrow{AL} \neq \overrightarrow{DE} \end{cases}$$

Alors il existe une unique rotation r qui transforme A en D et L en E.

c) Déterminons un angle et le centre de cette rotation :
Un angle de r est :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{DE}\right)=\left(\overrightarrow{LD},\overrightarrow{LF}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]}$$

Soit Ω le centre de r, alors :

$$r(A)=D\Rightarrow\Omega\in\mathrm{med}[AD]=(LF)$$
$$r(L)=E\Rightarrow\Omega\in\mathrm{med}[LE]=(FD)$$

Donc :

$$\{\Omega\}=(LF)\cap(FD)=\{\mathrm{F}\}$$

Soit :

$$\boxed{\Omega=\mathrm{F}}$$

2. a) Montrons qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme J en O et C en D :
Comme :

$$\begin{cases}J\neq C\\O\neq D\end{cases}$$

Alors il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme J en O et C en D.
b) Déterminons un angle et le centre de cette similitude :
Un angle de s_1 est :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{OD}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\pi}{4}[2\pi]}$$

Le rapport de s_1 est :

$$\boxed{\frac{OD}{JC}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}}$$

c) Déterminons $s_1(B)$:
On sait que :

$$\begin{aligned}&B=S_J(C)\\&\Rightarrow s_1(B)=S_{s_1(J)}\left(s_1(C)\right)\\&\Rightarrow s_1(B)=S_O(D)\\&\Rightarrow s_1(B)=B\end{aligned}$$

Donc B est le centre de s_1.
d) Déterminons $s_1(O)$:
On a :

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{4}[2\pi]\\\frac{BA}{BO}=\frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{s_1(O)=A}$$

Construction de l'image du carré $ABCD$ par s_1 :
On sait que :

$$\begin{aligned}&B\longmapsto B\\s_1:\ &C\longmapsto D\\&O\longmapsto A\end{aligned}$$

Donc comme : $A=S_O(C)$, alors : $s_1(A)=S_A(D)$ que l'on note A'.
De même : $D=S_O(B)$, alors : $s_1(D)=S_A(B)$ que l'on note D'.

Ainsi :

$$\boxed{s_1(ABCD) = A'BDD'}$$

Pour la construction voire la figure.

3) $s_2 = s_{\left(A,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right)}$. Déterminons $s_2(O)$ et $s_2(C)$:

On a :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AL}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ \dfrac{AL}{AO} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{s_2(O) = L}$$

De même :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{s_2(C) = D}$$

4. $f = s_2 \circ {s_1}^{-1}$. Pour tout point M du plan, $M_1 = s_1(M)$ et $M_2 = s_2(M)$.

a) Déterminons $f(D)$:

$$f(D) = s_2 \circ {s_1}^{-1}(D) = s_2(C) = D$$

Caractérisation de f :

f est la composée de deux similitudes directes d'angles $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ et de rapports $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$, donc f est une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Ce qui signifie que f est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.

Or : $f(D) = D$, alors :

$$\boxed{f = h_{\left(D,\frac{1}{2}\right)}}$$

b) Montrons que si $M_1 \neq M_2$, alors la droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera :

On sait que si $M_1 \neq M_2$, alors la droite (M_1M_2) est bien définie.

D'autre part :

$$f(M_1) = s_2 \circ {s_1}^{-1}(M_1) = s_2(M) = M_2$$

C'est-à-dire que :

$$\overrightarrow{DM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM_1}$$

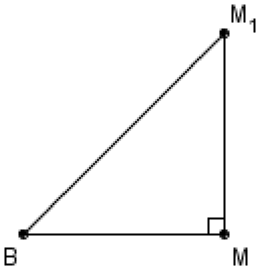
D'où la droite (M_1M_2) passe par le point D.

c) Déterminons et construisons les ensembles Γ_1 des points M du plan pour lesquels les points M, M_1 et M_2 sont alignés :

- Si $M = B$, alors $M = M_1$, d'où les points M, M_1 et M_2 sont alignés, et par suite $B \in \Gamma_1$.
- Si $M = A$, alors $M = M_2$, d'où les points M, M_1 et M_2 sont alignés, et par suite $A \in \Gamma_1$.
- Si $M \notin \{A, B\}$, alors $M \notin \{M_1, M_2\}$ et :

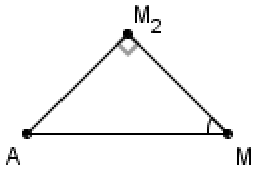
$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM_2}\right) + \left(\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_1}\right) + \left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MB}\right)[2\pi]$$

Or : $M_1 = s_1(M)$, alors le triangle BMM_1 est isocèle rectangle directe en M.



D'où : $\left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

De même : $M_2 = s_2(M)$**, alors le triangle** AMM_2 **est isocèle rectangle directe en** M_2.



D'où : $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM_2}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Ainsi :

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_1}\right) + \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Or :

$$\begin{aligned} &M \in \Gamma_1 \setminus \{A, B\} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_1}\right) = 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)[\pi] \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_{(ABD)} \setminus \{A, B\} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\Gamma_1 = \mathcal{C}_{(ABD)}}$$

5) a) Vérifions que $O = bar\{(A, 1); (D, 3); (E, -2)\}$ **:**

On a :

$$\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OL} = \vec{0}$$

Car : $L = A * D$.

Donc :

$$\boxed{O = bar\{(A, 1); (D, 3); (E, -2)\}}$$

b) Déterminons et construisons les ensembles Γ_1 **et** Γ_2 **tels que :**

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow 2MA^2 + 6MD^2 - 4ME^2 = a^2$$

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ME}\right)\left(2\overrightarrow{ML} + 2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$$

Pour tout point M **du plan on pose :**

$$\varphi(M) = 2MA^2 + 6MD^2 - 4ME^2$$

$$f(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ME}$$

$$g(M) = 2\overrightarrow{ML} + 2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MB}$$

φ **est la fonction scalaire de Leibnitz associée au système** $\{(A, 2); (D, 6); (E, -4)\}$ **de barycentre** O**. Donc** Γ_2 **(ligne de niveau** a^2 **de** φ**) est soit vide, soit réduit à** O**, soit un cercle centré en** O**.**

Or :

$$\varphi(D) = 2DA^2 - 4DE^2 = 2a^2 - 4\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

Donc $D \in \Gamma_2$**, d'où** Γ_2 **est le cercle de centre** O **et passant par** D**.**

Réduction de f et g :

On sait que f est la fonction vectorielle de Leibnitz associée au système $\{(A, 1); (K, 1); (E, -1)\}$.

Comme $1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$ donc ce système admet un barycentre que l'on note G. Et par suite :

$$\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{KB}$$

Donc : $G = B$, et pour tout point M du plan, on a :

$$f(M) = \overrightarrow{MB}$$

De même, on sait que g est la fonction vectorielle de Leibnitz associée au système $\{(L, 2); (K, 2); (B, -1)\}$.

Comme $2 + 2 - 1 = 3 \neq 0$ donc ce système admet un barycentre que l'on note G'.

Or :

$$2\overrightarrow{DL} + 2\overrightarrow{DK} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

Donc : $G' = D$, et pour tout point M du plan, on a :

$$g(M) = 3\overrightarrow{MD}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in \Gamma_3 &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ME}\right)\left(2\overrightarrow{ML} + 2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MB}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(M)g(M) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_{[BD]} \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que Γ_3 est le cercle de diamètre $[BD]$.

On remarque que :

$$\boxed{\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \mathcal{C}_{(ABCD)}}$$