# Corrigé de l'exercice 1

# du devoir Amimaths 7C 04/02/2017

**Par Moctar Baba Hamdi**

**Exercice 1**

**Soit $\alpha \in [0,\pi]$ et $(E_\alpha)$ l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par :**

$$z^2 - i(2\sin\alpha+1)e^{-i\alpha}z - 2(\sin\alpha)e^{-2i\alpha} = 0.$$

**1° a) Calculer le discriminent $\Delta(\alpha)$ et vérifier que $\Delta(\alpha) = \left[i(2\sin\alpha-1)e^{-i\alpha}\right]^2$.**

**b) En déduire les deux solutions de $(E_\alpha)$ .telles que $|z'|=1$ et $z''$ l'autre solution.**

**c) Mettre $z'$ et $z''$ sous forme exponentielle.**

**2° ) Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi |\Delta(\alpha)| d\alpha$**

**Corrigé**

$\alpha \in [0,\pi]$ $\quad z^2 - i(2\sin\alpha+1)e^{-i\alpha}z - 2(\sin\alpha)e^{-2i\alpha} = 0 \quad (E_\alpha)$

**1. a) Calculons le discriminant $\Delta(\alpha)$ de $E_\alpha$ :**

$$\Delta(\alpha) = [-i(2\sin\alpha+1)e^{-i\alpha}]^2 + 8(\sin\alpha)e^{-2i\alpha}$$

$$= -(2\sin\alpha+1)^2 e^{-2i\alpha} + 8(\sin\alpha)e^{-2i\alpha}$$

$$= -[(2\sin\alpha)^2 + 4(\sin\alpha) + 1 - 8(\sin\alpha)]e^{-2i\alpha}$$

$$= -[(2\sin\alpha)^2 - 4(\sin\alpha) + 1]e^{-2i\alpha}$$

$$= -(2\sin\alpha-1)^2 e^{-2i\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta(\alpha) = [i(2\sin\alpha-1)e^{-i\alpha}]^2}$$

**b) Déduisons les solutions de $E_\alpha$ :**

**Les solutions de $E_\alpha$ sont ($z'$ est la solution dont le module est égal à 1):**

$$\boxed{\begin{cases} z' = \dfrac{i(2\sin\alpha+1)e^{-i\alpha} - i(2\sin\alpha-1)e^{-i\alpha}}{2} = ie^{-i\alpha} \\ z'' = \dfrac{i(2\sin\alpha+1)e^{-i\alpha} + i(2\sin\alpha-1)e^{-i\alpha}}{2} = 2i(\sin\alpha)e^{-i\alpha} \end{cases}}$$

**c) Mettons $z'$ et $z''$ sous forme exponentielle :**

$$z' = ie^{-i\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\alpha} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$z'' = 2i(\sin\alpha)e^{-i\alpha} = 2(\sin\alpha)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

**Comme $\alpha \in [0,\pi]$, alors $\sin\alpha \geq 0$, et donc cette forme est bien l'écriture exponentielle de $z''$.**

**2. Calculons l'intégrale $I = \int_0^\pi |\Delta(\alpha)|d\alpha$ :**

$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi |\Delta(\alpha)|d\alpha = \int_0^\pi (2\sin\alpha-1)^2 d\alpha = \int_0^\pi (4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha+1)d\alpha \\ = \int_0^\pi (2(1-\cos 2\alpha) - 4\sin\alpha + 1)d\alpha = \int_0^\pi (3 - 2\cos 2\alpha - 4\sin\alpha)d\alpha \\ = [3\alpha - \sin 2\alpha + 4\cos\alpha]_0^\pi = 3\pi - 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 3\pi - 8}$$