Corrigé de l'exercice 2

du devoir Amimaths 7C 04/02/2017

Par Moctar Baba Hamdi

Exercice 2

On se propose dans cet exercice de calculer, par deux méthodes différentes, l'intégrale $I=\int_2^3\sqrt{-x^2+6x-8}dx$ 1)On pose $g(x)=\sin x$ avec $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera et montrer que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Calculer la dérivée de la fonction H définie par : $H(x)=(x-3)\sqrt{-x^2+6x-8}+g^{-1}(x-3)$.

c) En déduire le calcul de l'intégrale $I=\int_2^3\sqrt{-x^2+6x-8}dx$.

2) En posant $x=3+\cos t$, recalculer I et comparer avec les résultats précédents.

Corrigé

$$I=\int_2^3\sqrt{-x^2+6x-8}\,dx$$

$g(x)=\sin x$ **avec** $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ **:**

1. a) Montrons que g réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera et que $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

Comme :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ g'(x)=\cos x>0$$

Alors g est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle $\left]g\left(-\frac{\pi}{2}\right),g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right[=\left]-1,1\right[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\cos\left(g^{-1}(x)\right)}$$

Or $\forall x \in]-1,1[, g^{-1}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$**, alors** $\cos\left(g^{-1}(x)\right) > 0 \Rightarrow \cos\left(g^{-1}(x)\right) = \sqrt{\left(\cos\left(g^{-1}(x)\right)\right)^2} = \sqrt{1-\left(\sin\left(g^{-1}(x)\right)\right)^2} = \sqrt{1-\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)^2} = \sqrt{1-x^2}.$

Ainsi :

$$\forall x \in]-1,1[,(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Calculons la dérivée de $H(x) = (x-3)\sqrt{-x^2+6x-8} + g^{-1}(x-3)$ **:**

$$\begin{aligned}\forall x \in]2,3[, H'(x) &= \sqrt{-x^2+6x-8} + (x-3)\frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x-8}} + \frac{1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}\\ &= \sqrt{-x^2+6x-8} - \frac{(x-3)^2}{\sqrt{-x^2+6x-8}} + \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\\ &= \sqrt{-x^2+6x-8} + \frac{1-(x-3)^2}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \sqrt{-x^2+6x-8} + \frac{-x^2+6x-8}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\\ &= 2\sqrt{-x^2+6x-8}\end{aligned}$$

c) Déduisons la valeur de I **:**

$$\begin{aligned}I = \int_2^3 \sqrt{-x^2+6x-8}\,dx &= \frac{1}{2}\int_2^3 H'(x)dx = \frac{1}{2}[H(x)]_2^3 = \frac{1}{2}\left(H(3)-H(2)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(g^{-1}(0) - g^{-1}(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

2. Recalculons I en effectuant le changement de variable $x = 3 + \cos t$

On pose : $x = 3 + \cos t$**. On a :**

Si $x = 2$**, alors** $\cos t = -1 \Rightarrow t = \pi$

Si $x = 3$**, alors** $\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$dx = -\sin t\, dt$$

$\sqrt{-x^2+6x-8} = \sqrt{1-(x-3)^2} = \sqrt{1-(\cos t)^2} = \sqrt{(\sin t)^2} = |\sin t| = \sin t$ **car** $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$**.**

Et donc :

$$I = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} -\sin t \sin t \, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin t)^2 dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1-\cos 2t) dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

On constate que c'est la même valeur de I trouvée en 1.c).