Corrigé de l'exercice 4

du devoir Amimaths 7C 04/02/2017

Par Moctar Baba Hamdi

Exercice 4 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

1° On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(E_\theta\right)$: $z^3+2ie^{i\theta}z^2-2ie^{2i\theta}z-4e^{3i\theta}\left(2+i\right)=0$ avec $\theta\in\left[0,2\pi\right[$.

a) Vérifier que $\left(E_0\right)$ pour $\left(\theta=0\right)$ admet une solution réelle à déterminer.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E_0\right)$.

2° a) Montrer que z est une solution de $\left(E_\theta\right)$ si et seulement si $ze^{-i\theta}$ est solution de $\left(E_0\right)$

b) En déduire les solutions $\left(E_\theta\right)$.

3° On note A, B et C les images des solutions de $\left(E_0\right)$ avec $z_A\in\mathbb{R}$, $\left|z_B\right|<\left|z_C\right|$ et A', B' et C' celles des solutions de $\left(E_\theta\right)$.

a) Calculer puis interpréter les complexes $\dfrac{z_A}{z_B-z_C}$ et $\dfrac{z_B}{z_C-z_A}$.

b) Caractériser l'application r de P dans P qui à tout point $M\left(z\right)$ associe $M'\left(z'\right)$ tel que $z'=e^{i\theta}z$

c) En déduire que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même orthocentre.

d) Montrer que les points A', B' et C' varient sur des cercles concentriques à préciser.

Corrigé

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. $\theta\in[0,2\pi[$, $\quad z^3+2ie^{i\theta}z^2-2ie^{2i\theta}z-4e^{3i\theta}(2+i)=0 \quad (E_\theta)$

a) Vérifions que (E_0) admet une solution réelle :

Si $z\in\mathbb{R}$ est une solution de (E_0), alors :

$$z^3+2iz^2-2iz-4(2+i)=0$$

$$\Rightarrow z^3 - 8 + \mathrm{i}(2z^2 - 2\mathrm{z} - 4) = 0$$

$$\Rightarrow z^3 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{z} = 2}$$

Réciproquement, il est simple à vérifier que $\mathrm{z} = 2$ est bien une solution de (E_0).

b) Résolution de (E_0) dans $\mathbb{C}$:

Comme 2 est une solution de (E_0), alors le polynôme $z^3 + 2\mathrm{i}z^2 - 2iz - 4(2+\mathrm{i})$ est factorisable par $\mathrm{z} - 2$.

Donc il existe deux nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 + 2iz^2 - 2iz - 4(2+i) = (z-2)(z^2 + az + b) = z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$$

D'où par identification :

$$\begin{cases} a - 2 = 2i \\ b - 2a = -2i \\ -2b = -4(2+i) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 + 2i \\ b = 4 + 2i \end{cases}$$

Ainsi, (E_0) est équivalente à :

$$(z-2)(z^2 + (2+2i)z + 4 + 2i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - 2 = 0 \quad (1) \\ ou \\ z^2 + (2+2i)z + 4 + 2i = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation (2) est :

$$\Delta = (2+2i)^2 - 4(4+2i) = -16 = (4i)^2$$

Ses solutions sont donc :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-(2+2\mathrm{i}) - 4i}{2} = -1 - 3i \\ z_2 = \dfrac{-(2+2\mathrm{i}) + 4i}{2} = -1 + i \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (E_0) est donc :

$$\boxed{S_0 = \{2, -1-3i, -1+i\}}$$

2. a) Montrons que z est solution de (E_θ) ssi $ze^{-i\theta}$ est solution de (E_0) :

z est solution de $(E_\theta) \Leftrightarrow z^3 + 2ie^{i\theta}z^2 - 2ie^{2i\theta}z - 4e^{3i\theta}(2+i) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{3i\theta}\left(z^3e^{-3i\theta} + 2ie^{-2i\theta}z^2 - 2ie^{-i\theta}z - 4(2+i)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$\left(ze^{-i\theta}\right)^3 + 2i\left(ze^{-i\theta}\right)^2 - 2i\left(ze^{-i\theta}\right) - 4(2+i) = 0 \Leftrightarrow ze^{-i\theta}$ est solution de (E_0).

b) Déduisons les solutions de (E_θ) :

D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de (E_θ) est :

$$\boxed{S_\theta = \{2e^{i\theta}, (-1-3i)e^{i\theta}, (-1+i)e^{i\theta}\}}$$

3. $A(z_A = 2)$, $B(z_B = -1+i)$, $C(z_C = -1-3i)$, $A'\left(z_{A'} = 2e^{i\theta}\right)$, $B'\left(z_{B'} = (-1+i)e^{i\theta}\right)$ et $C'\left(z_{C'} = (-1-3i)e^{i\theta}\right)$.

a) Calculons et interprétons les complexes $\frac{z_A}{z_B - z_C}$ et $\frac{z_B}{z_C - z_A}$:

$$\frac{z_A}{z_B - z_C} = \frac{2}{-1+i+1+3i} = -\frac{i}{2} \Rightarrow (OA) \perp (BC)$$

$$\frac{z_B}{z_C - z_A} = \frac{-1+i}{-1-3i-2} = \frac{-1+i}{-3-3i} = \frac{1}{3} \times \frac{1-i}{1+i} = -\frac{i}{3} \Rightarrow (OB) \perp (AC)$$

Ainsi on a montré que O est un point commun des hauteurs issues de A et B dans le triangle ABC, et donc O est l'orthocentre du triangle ABC.

b) Caractérisons l'application $r: \begin{matrix} P \to P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{matrix}$ tel que $z' = ze^{i\theta}$:

<u>**1e méthode :**</u>

L'écriture complexe de r est de la forme $z' = az + b$ avec $a = e^{i\theta}$ et $b = 0$.

Si $\theta = 0$, alors r est l'application identique du plan (translation de vecteur nul).

Si $\theta = \pi$, alors r est la symétrie centrale (homothétie de rapport -1) de centre O (car $\frac{b}{1-a} = 0$).

Si $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, alors r est la rotation (car $a = e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = 1$) de centre O (car $\frac{b}{1-a} = 0$) et d'angle $\theta = arg(a)$.

Dans les trois cas on peut conclure que r est la rotation de centre O et d'angle θ.

2^e méthode :

Si $z=0$, alors $z'=0$. Donc : $r(O)=O$.

Si $z\neq 0$, alors $z'\neq 0$. Donc :

$$\frac{z'}{z}=e^{i\theta}\Rightarrow\begin{cases}\left|\frac{z'}{z}\right|=1\\ arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\theta\quad[2\pi]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}OM=OM'\\ \left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)=\theta\quad[2\pi]\end{cases}\Rightarrow M'=r_{(O,\theta)}(M).$$

Ainsi, r est la rotation de centre O et d'angle θ.

c) Déduisons que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même orthocentre :

On sait que :

$$z_{A'}=z_Ae^{i\theta}\Rightarrow A'=r(A)$$

Et de même $B'=r(B)$ et $C'=r(C)$.

Donc r transforme l'orthocentre O du triangle ABC en l'orthocentre du triangle $A'B'C'$. Et comme O est invariant par r, alors ces deux triangles ont le même orthocentre.

d) Montrons que les points A', B' et C' varient sur des cercles concentriques :

On a :

$$|z_{A'}|=\left|2e^{i\theta}\right|=2\Rightarrow A'\in\mathcal{C}_{(O,2)}$$

$$|z_{B'}|=\left|(-1+i)e^{i\theta}\right|=\sqrt{2}\Rightarrow B'\in\mathcal{C}_{(O,\sqrt{2})}$$

$$|z_{C'}|=\left|(-1-3i)e^{i\theta}\right|=\sqrt{10}\Rightarrow C'\in\mathcal{C}_{(O,\sqrt{10})}$$

D'où les points A', B' et C' varient sur des cercles concentriques de centre O.