Corrigé de l'exercice 5

du devoir Amimaths 7C 04/02/2017

Par Moctar Baba Hamdi

Exercice 5

Soit la f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1+\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

1° a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de (C).

c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point I .

d) Tracer la courbe (C) et la droite $\Delta : y=x$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2° a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,2[$.

b) Montrer que l'expression de $f^{-1}(x)$ sur $]0,2[$ est : $f^{-1}(x)=\frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}$.

c) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le repère précédent.

3° On considère la fonction g définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=f(\tan x)$ pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

a) Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que l'expression de g sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ est : $g(x)=1+\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

c) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle à déterminer.

d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1,2]$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{2}{1+(x-1)^2}$.

e) Montrer que $\forall x\in[1,2]$ $g^{-1}(x)+g^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.

4° On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$ et $v_n=\frac{u_n}{n+1}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $g^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\le g^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\le g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

En déduire que (v_n) est convergente et donner sa limite.

b) Soit $t_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{2(n+k)}{1+n+k}\right)$. Déduire que (t_n) est convergente et donner sa limite.

Corrigé

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

1. Etude des variations de f :

- Limites aux bornes de D_f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{1+\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{1-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = 1+\frac{1}{0-1}$$
$$= 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1+\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1+x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = 1+\frac{1}{0+1}$$
$$= 2$$

- Calcul de la dérivée :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}+1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)} > 0$$

- Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

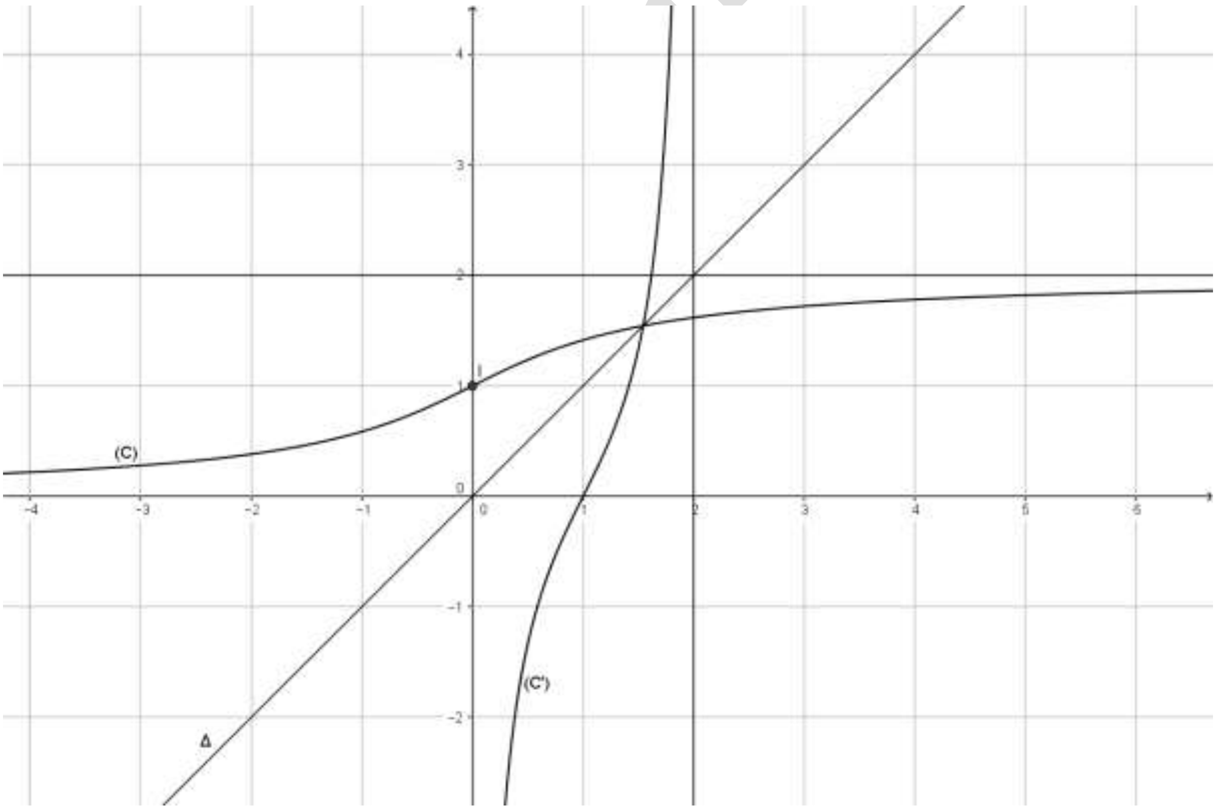
b) Montrons que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de (C) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) + f(x) = 1 - \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + 1 + \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} = 2$$

Donc le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de (C).

c) Equation de la tangente (T) à (C) en I :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{x}{2} + 1$$



d) Tracé de (C) et de la droite Δ: $y = x$:

2. a) Montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,2[$:

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,2[$.

b) Montrons que l'expression de $f^{-1}(x)$ sur $]0,2[$ est : $f^{-1}(x)=\frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}$

Soit $x\in\,]0,2[$, alors il existe un unique $y\in\mathbb{R}$ tel que $x=f(y)=1+\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}$

$$\Leftrightarrow x-1=\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{y^2}{\left(1+\sqrt{1+y^2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1-(x-1)^2=1-\frac{y^2}{\left(1+\sqrt{1+y^2}\right)^2}=\frac{2+2\sqrt{1+y^2}}{\left(1+\sqrt{1+y^2}\right)^2}=\frac{2}{1+\sqrt{1+y^2}}=\frac{2(x-1)}{y}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x\in\,]0,2[,\ f^{-1}(x)=\frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}}$$

c) Tracé de la courbe (C') de f^{-1} :
Voir figure.

3. $g(x)=\begin{cases} f(\tan x) & si\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

a) Montrons que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

- Continuité sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$:

La fonction $x\mapsto\tan x$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

- Continuité à gauche en $\frac{\pi}{2}$:

On a :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=+\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=2\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}g(x)=2=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrons que l'expression de $g(x)$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ est : $g(x)=1+\frac{\sin x}{1+\cos x}$

On a :

$$1+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=1+\frac{1}{1+0}=2=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Et :

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[,\ g(x)=f(\tan x)=1+\frac{\tan x}{1+\sqrt{1+(\tan x)^2}}=1+\frac{\tan x}{1+\frac{1}{\cos x}}$$
$$=1+\frac{\tan x\cos x}{1+\cos x}=1+\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

D'où :

$$\boxed{\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ g(x)=1+\frac{\sin x}{1+\cos x}}$$

c) Montrons que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle que l'on déterminera :

g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (car son dénominateur $1+\cos x$ ne s'annule pas sur cet intervalle), et :

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ g'(x)=\frac{\cos x\,(1+\cos x)+(\sin x)^2}{(1+\cos x)^2}=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}>0$$

D'où g est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc elle réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur l'intervalle $\left[g(0),g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=[1,2]$.

d) Montrons que g^{-1} est dérivable sur $[1,2]$ et que $(g^{-1})'(x)=\frac{2}{1+(x-1)^2}$

g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ g'(x)=\frac{1}{1+\cos x}\neq 0$$

Donc g^{-1} est dérivable sur $[1,2]$ et :

$$\forall x\in[1,2],\ (g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\frac{1}{1+\cos\left(g^{-1}(x)\right)}}=1+\cos\left(g^{-1}(x)\right)$$

Or :

$$x=g\left(g^{-1}(x)\right)=1+\frac{\sin\left(g^{-1}(x)\right)}{1+\cos\left(g^{-1}(x)\right)}\Rightarrow x-1=\frac{\sin\left(g^{-1}(x)\right)}{1+\cos\left(g^{-1}(x)\right)}$$
$$\Rightarrow (x-1)^2=\frac{\left[\sin\left(g^{-1}(x)\right)\right]^2}{\left[1+\cos\left(g^{-1}(x)\right)\right]^2}$$
$$\Rightarrow 1+(x-1)^2=\frac{\left[1+\cos\left(g^{-1}(x)\right)\right]^2+\left[\sin\left(g^{-1}(x)\right)\right]^2}{\left[1+\cos\left(g^{-1}(x)\right)\right]^2}=\frac{2+2\cos\left(g^{-1}(x)\right)}{\left[1+\cos\left(g^{-1}(x)\right)\right]^2}$$
$$=\frac{2}{1+\cos\left(g^{-1}(x)\right)}=\frac{2}{(g^{-1})'(x)}$$

D'où :

$$\boxed{\forall x \in [1,2], (g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2}}$$

e) Montrons que $\forall x \in [1,2], g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

On sait que : $\forall x \in [1,2], \frac{2}{x} \in [1,2]$**. On définie, donc, sur** $[1,2]$ **la fonction** h **par :**

$$h(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ **est dérivable sur** $[1,2]$ **à valeurs dans** $[1,2]$ **et** g^{-1} **est dérivable sur** $[1,2]$**, alors** h **est dérivable et :**

$$\forall x \in [1,2], h'(x) = (g^{-1})'(x) - \frac{2}{x^2}(g^{-1})'\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{1+(x-1)^2} - \frac{2}{x^2}\frac{2}{1+\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2}\frac{2}{\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}+2} = \frac{2}{x^2-2x+2} - \frac{4}{2x^2-4x+4}$$

$$= \frac{2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-2x+2} = 0$$

Donc h **est constante sur** $[1,2]$**, d'où :**

$$\forall x \in [1,2], h(x) = h(1) = g^{-1}(1) + g^{-1}(2) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [1,2], g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

4. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \ et \ v_n = \frac{u_n}{n+1}$$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq g^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \leq g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n]\!], 0 \leq k \leq n \Rightarrow n \leq n+k \leq 2n$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2n} \leq 1+\frac{1}{n+k} \leq 1+\frac{1}{n}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n]\!], 1+\frac{1}{n+k} \in [1,2]$ **(domaine de définition de** g^{-1}**) et :**

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n]\!], g^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq g^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \leq g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Car g^{-1} **est croissante sur** $[1,2]$**.**

Déduisons que (v_n) **est convergente et calculons sa limite :**

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n]\!], g^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq g^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \leq g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)g^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq u_n \leq (n+1)g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, g^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq v_n \leq g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = 1$$

Et g^{-1} est continue en 1, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} g^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = g^{-1}(1) = 0$$

Donc, par encadrement, (v_n) est convergente et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

d) Déduisons que (t_n) est convergente et calculons sa limite avec :

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{2(n+k)}{1+n+k}\right)$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{2(n+k)}{1+n+k}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{2}{1+\frac{1}{n+k}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\pi}{2} - g^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - v_n$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

Donc (t_n) est convergente et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{\pi}{2}}$$