Olympiades Nationales de Mathématiques 2017

Sélections régionales **Niveau 4AS** **05 février 2017**

1er tour **Durée 3 h**

Solution

proposée par El-Moctar Ould Baba Ould Hamdi

Exercice 1 :

$$\boldsymbol{A = (x-1)^2 - (x-2)^2 + (x-3)^2 - (x-4)^2 + (x-5)^2 - (x-6)^2 + (x-7)^2 - (x-8)^2 + (x-9)^2 - (x-10)^2}$$

1. **Calcul de A pour $x = 0$:**

Pour $x = 0$:

$$\boldsymbol{A = (0-1)^2 - (0-2)^2 + (0-3)^2 - (0-4)^2 + (0-5)^2 - (0-6)^2 + (0-7)^2 - (0-8)^2 + (0-9)^2 - (0-10)^2}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow A = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Rightarrow A = -55}}$$

2. **Simplification de A :**

$$\boldsymbol{(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1}$$

$$\boldsymbol{-(x-2)^2 = -x^2 + 4x - 4}$$

$$\boldsymbol{(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9}$$

$$\boldsymbol{-(x-4)^2 = -x^2 + 8x - 16}$$

$$\boldsymbol{(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25}$$

$$\boldsymbol{-(x-6)^2 = -x^2 + 12x - 36}$$

$$\boldsymbol{(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49}$$

$$\boldsymbol{-(x-8)^2 = -x^2 + 16x - 64}$$

$$(x-9)^2 = x^2 - 18x + 81$$

$$-(x-1)^2 = -x^2 + 20x - 100$$

En effectuant la somme terme à terme, on obtient :

$$\boxed{A = 10x - 55}$$

On peut aussi remarquer que :

$$\begin{aligned}(x-n)^2 - \big(x-(n+1)\big)^2 &= (x-n-x+n+1)\big(x-n+x-(n+1)\big)\\ &= 2x-(2n+1)\end{aligned}$$

d'où :

Pour $n = 1$ **:** $(x-1)^2 - (x-2)^2 = 2x - 3$
Pour $n = 3$ **:** $(x-3)^2 - (x-4)^2 = 2x - 7$
Pour $n = 5$ **:** $(x-5)^2 - (x-6)^2 = 2x - 11$
Pour $n = 7$ **:** $(x-7)^2 - (x-8)^2 = 2x - 15$
Pour $n = 9$ **:** $(x-9)^2 - (x-10)^2 = 2x - 19$

Ce qui confirme que :

$$\boxed{A = 10x - 55}$$

Exercice 2 :

1. **Montrons que :** $\sqrt{10+\sqrt{19}} + \sqrt{10-\sqrt{19}} = \sqrt{38}$

On pose : $a = \sqrt{10+\sqrt{19}}$ **et** $b = \sqrt{10-\sqrt{19}}$**. On a :**

$$a^2 + b^2 = \left(\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^2 + \left(\sqrt{10-\sqrt{19}}\right)^2 = 10 + \sqrt{19} + 10 - \sqrt{19} = 20$$

Et :

$$\begin{aligned}2ab &= 2\sqrt{10+\sqrt{19}}\sqrt{10-\sqrt{19}} = 2\sqrt{(10+\sqrt{19})(10-\sqrt{19})} = 2\sqrt{10^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2}\\ &= 2\sqrt{100-19} = 2\sqrt{81} = 2\times 9 = 18\end{aligned}$$

D'où :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 20 + 18 = 38$$

Et comme : $a + b \geq 0$**, donc :** $a + b = \sqrt{38}$

Ainsi :

$$\boxed{\sqrt{10+\sqrt{19}}+\sqrt{10-\sqrt{19}}=\sqrt{38}}$$

2. **Cherchons x pour que : $\sqrt{10+\sqrt{19}}-\sqrt{10-\sqrt{19}}=\sqrt{x}$**

On a :

$$\left(\sqrt{10+\sqrt{19}}-\sqrt{10-\sqrt{19}}\right)^2=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=20-18=2$$

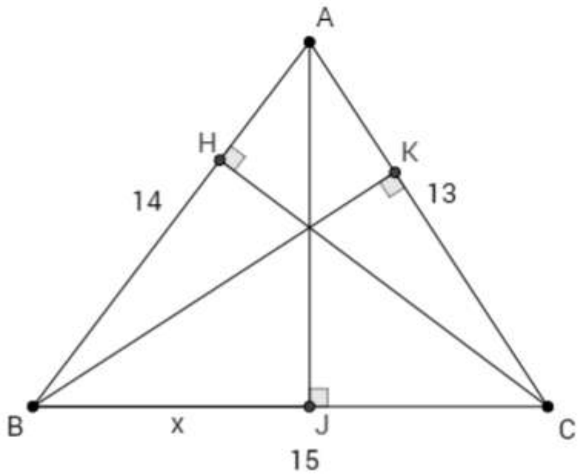
Et comme $a-b\geq 0$, donc :

$$\sqrt{10+\sqrt{19}}-\sqrt{10-\sqrt{19}}=\sqrt{2}$$

D'où :

$$\boxed{x=2}$$

Exercice 3 :



1.

a) Ecrivons deux égalités de Pythagore faisant intervenir AJ :

Les triangles AJB et AJC sont rectangles en J, donc d'après Pythagore :

$$AB^2=AJ^2+BJ^2 \quad (1)$$
$$AC^2=AJ^2+CJ^2 \quad (2)$$

b) Déduisons la valeur de x :

Comme $BJ=x$, donc : $CJ=BC-x=15-x$.

$$(1)\Rightarrow AJ^2=14^2-x^2=196-x^2$$

$$(2) \Rightarrow AJ^2 = 13^2 - (15-x)^2 = 169 - (15-x)^2 = 30x - 56 - x^2$$

D'où :

$$196 - x^2 = 30x - 56 - x^2$$

$$\Longrightarrow 196 = 30x - 56$$

$$\Longrightarrow x = \frac{196+56}{30}$$

$$\boxed{\Longrightarrow x = \frac{42}{5}}$$

Ainsi :

$$AJ^2 = 196 - x^2 = 196 - \frac{1764}{25} = \frac{196 \times 25 - 1764}{25} = \frac{3136}{25} = \left(\frac{56}{5}\right)^2$$

$$\boxed{\Longrightarrow AJ = \frac{56}{5}}$$

2. **Calculons BK et CH :**

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC, on sait que :

$$2\mathcal{A} = CH \times AB = BK \times AC = AJ \times BC = \frac{56}{5} \times 15 = 168$$

Donc :

$$\boxed{BK = \frac{168}{13}}$$

Et :

$$\boxed{CH = \frac{168}{14} = 12}$$

3. **Si on multiplie les longueurs des côtés d'un triangle par un réel strictement positif, les longueurs de ces hauteurs seront multipliées par le même nombre.**

Ainsi, en multipliant les longueurs des côtés ABC par $13 \times 5 = 65$, on obtient un nouveau triangle dont les côtés et les hauteurs ont pour longueurs des nombres entiers.

Dans ce nouveau triangle :

$AB = 910\ cm$, $BC = 975\ cm$, $AC = 845\ cm$, $AJ = 728\ cm$, $BK = 840\ cm$ **et** $CH = 780\ cm$.

Exercice 4 :

$\mathbf{1}$	$\mathbf{64}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{a}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{16}$	$\mathbf{4}$
$\mathbf{8}$	$\mathbf{2}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{h}$
$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{f}$	$\mathbf{32}$

Déterminons $\boldsymbol{f}$:

Le produit des nombres inscrits dans la 4ème ligne est : $\boldsymbol{32bcf}$, et le produit des nombres inscrits dans la 2ème colonne est : $\boldsymbol{512c}$. Ce qui implique que :

$$\boldsymbol{32bcf = 512c}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow f = \frac{16}{b}}$$

Le produit des nombres inscrits dans la 2ème ligne est : $\boldsymbol{256a}$, et le produit des nombres inscrits dans la 1ère colonne est : $\boldsymbol{8ab}$. Ce qui implique que :

$$\boldsymbol{8ab = 256a}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow b = 32}$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{\Rightarrow f = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}}}$$