LYCEE TOUJOUNINE EPREUVE DE MATHS

7 C 21/05/2016

BAC BLANC DU 3ND TRIMESTRE

Exercice 1

Soit u un nombre complexe tel que $u \neq 1-i$

1) **a- Développer $(ui-1-i)^2$**

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$

2) **Dans le plans complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, U et Ω d'affixes respectives $(1+i)u-2i$, $(1-i)u+2$, u et $2-2i$,**
   - **a- Déterminer l'affixe de I, milieu de $[AB]$ puis déterminer le vecteur de la translation t transformant U en I.**
   - **b- Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que r(A)=B.**
   - **c- Déduire que $(\Omega I) \perp (AB)$**
   - **d- Expliquer une méthode de construction des points A et B à partir d'une position donnée de U.**

3) On pose $u = a(1+i)-2i$, $a \in \mathbb{R}$

a- Déterminer les affixes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de a.

b- En déduire que A, B et U sont alignés.

Exercice 2

A) On considère l'équation (E) : $35u-96v=1$ où u et v sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (11,4) est une solution particulière de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

B) On considère l'équation (F) $x^{35} \equiv 2[97]$ dans $\mathbb{N}$

1) Soit x une solution de (F)

a- Montrer que 97 est un nombre premier,et que x et 97 sont premiers entre eux.

b- Montrer que $x^{96} \equiv 1[97]$

c- Montrer que $x \equiv 2^{11}[97]$

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv 2^{11}[97]$ alors x est une solution de (F)

3) Montrer que les solutions de (F) sont les entiers naturels de la forme $11+97k$, $k \in \mathbb{N}$

Exercice 3

On considère un carré AFED de coté 4 cm, tel que $(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O son centre, On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à (EF).

A) 1) a- Faire une figure illustrant les données.

b- Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que r(F)=E et r(E)=D préciser son angle et son centre.

c- Soit $f = r \circ s_{OO_1}$ montrer que f est une symétrie axiale d'axe (OE).

2) Soit $r' = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}$

a- Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle.

b- Déterminer r'(O) et en déduire le centre de r'.

3) a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que g(D) = F et g(O) = O_1

b- Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

c- Soit M un point du plan, montrer que g(M) = r'(M) si et seulement si f(M) = M

e- En déduire l'ensemble des points M tels g(M) = r'(M)

B) 1) a- Montrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que s(A) = F et $s(B) = E$

b- Déterminer l'angle et le rapport de s.

c- Montrer que $s = r \circ h_{(A, \frac{1}{2})}$

2) Soit Ω le centre de s

a- Montrer que Ω appartient aux deux cercles de diamètres $[AF]$ et $[EB]$. Construire Ω

b- Montrer que s(E) = O en déduire que Ω, O et B sont alignés.

3)On pose $B_0 = B$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_{n+1} = s(B_n)$

a- Préciser B_1 et B_2

b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_{n-1}B_nB_{n+1}$ est un triangle rectangle et que les points B_{n-1}, Ω et B_{n+1} sont alignés.

c- Donner un procédé de construction de B_{n+1} à partir de B_{n-1} et B_n

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $d_n = B_nB_{n+1}$

a- Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont-on précisera la raison et le premier terme

b- Soit $V_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$ Calculer (V_n) en fonction de n et déterminer $\lim_{n \to +\infty} V_n$

C) On désigne par I le milieu de $[AF]$ et J le milieu de $[OI]$ et L est le symétrique de J par rapport à I, Soit (E) l'ellipse de sommets A, F, J et L

1) Construire les foyers G_1 et G_2 de (E) tels que G_1 est le foyer situé sur le segment $[IF]$

2) Soit $G_1^{'} = s(G_1)$

Montrer que la droite $(\Omega G'_1)$ est une tangente à (E)

Exercice 4

I) Soit f la fonction définie sur $I=[0,1]$ par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & 0\le x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$ et so

C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) Montrer que f est continue à gauche de 1.
2) Etudier la dérivabilité de f et à gauche de 1.
3) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f.
4) a- Montrer que la courbe C admet un point d'inflexion d'abscisses $\dfrac{e-1}{e}$

   b- Construire la courbe C.

5) Montrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $f(\alpha)=\alpha$
6) a- Montrer que f réalise une bijection de I sur I.
   b- Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ sur I.

II) On pose $I_0=\int_0^1 f(t)dt$ et pour tout entier naturel n, $I_n=\int_0^1 t^n f(t)dt$

1) Montrer que (I_n) est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

2) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ 0\le I_n\le \dfrac{1}{n+1}$ puis déterminer la limite de (I_n).

III) $\forall x\in J=[0,1[$ on pose $F_0(x)=\int_0^x f(t)dt$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*\ F_n(x)=\int_0^x t^n f(t)dt$

et on pose $F(x)=\int_0^x \dfrac{f(t)}{1-t}dt$ et $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} F_k(x)$

1) Montrer que $\forall x\in J\ \ \forall n\in\mathbb{N}\quad F(x)-S_n(x)=\int_0^x \dfrac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt$

2) a- Montrer que la fonction $u(x)=(1-x)\left(1-\ln(1-x)\right)$ est décroissante sur J.

   b- Déduire que la fonction $v(t)=\dfrac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0,x]$ pour tout x de J.

3) a- Montrer que $\forall x\in J\ \ \forall n\in\mathbb{N}\quad 0\le F(x)-S_n(x)\le \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

   b- Déduire que $\forall x\in J\quad \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)=F(x)$

4) a- Déterminer F(x) pour x de J.
   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$

Fin.