Série d'exercices :Les fonctions

Lycée de garçons 2

Exercice 1:

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 2x^2$.

a) Calculer les images par f des réels 0; $\sqrt{2}$ et -4.

b) Vérifier que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ ont pour image 4.

c) Pourquoi -4 n'est-il l'image d'aucun réel ?

Exercice 2:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)(x+1)$

1/ Quelles sont les images par f de 2 et de -10 ?

2/ Quels sont les antécédents de 0 par f ?

3/ Les points de coordonnées $(-1 ; 3)$, $(0 ; -3)$ et $(1 ; 0)$ sont-ils des points de la représentation graphique de f ?

Exercice 3:

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f : x \longmapsto x^2 + 3x + 1$

a) Calculer les images par f des réels 0; 1; $-\sqrt{3}$ et $\frac{1}{2}$.

b) Trouver tous les réels qui ont pour image 1 par f.

Exercice 4:

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto x^2$?

b) Quel est le réel pour lequel on ne peut pas calculer $\frac{1}{x}$? Donner alors l'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

c) Quels sont les réels pour lesquels on peut calculer $\sqrt{x}$? Donner alors l'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.

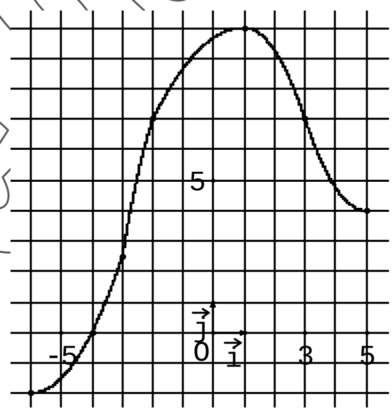
Exercice 5 :

Soit f la fonction représentée ci-contre.

1. Donner l'ensemble de définition.
2. a) Lire l'image de 3 par f ; $f(1)$; $f(-4)$; $f(-2)$ et $f(5)$.

   b) Lire les antécédents de 7 par f.

   c) Lire les antécédents de 0 par f.

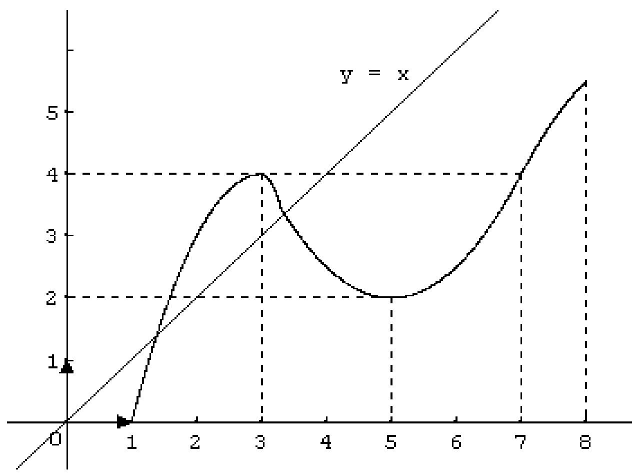


Exercice 6:

On a représenté ci-contre :

- la droite d'équation $y = x$,
- la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[1 ; 8]$.

(Les questions posées seront résolues par lecture graphique).



1.Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes :

n°	Affirmation	vrai ou faux
1.	1 a pour image 0 par la fonction f	
2.	0 a pour image 1 par la fonction f	
3.	7 est un antécédent de 4 par la fonction f	
4.	3 est un antécédent de 4 par la fonction f	
5.	$f(3) = 4$	
6.	$f(2) = 5$	
7.	$f(3) > f(5)$	
8.	2,5 a trois antécédents par la fonction f	
9.	0,5 a un seul antécédent par la fonction f	
10.	L'équation $f(x) = 3$ a au moins une solution dans l'intervalle [1 ; 8]	
11.	L'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans l'intervalle [1 ; 8]	
12.	f est croissante sur l'intervalle [1 ; 8]	
13.	Si x appartient à l'intervalle [4 ; 5], alors $f(x) \leq x$	
14.	Si a et b appartiennent à l'intervalle [3 ; 5] et si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$	

2. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) - f(3) > 0$. On donnera la solution sous forme d'un intervalle.

Exercice 7:

Soit la fonction numérique définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur $I = [-2 ; 5]$.

1/ Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$															

2/ Placer les points de coordonnées $(x ; f(x))$ dans un repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ en prenant comme unité 1 cm. Tous ces points appartiennent à la représentation graphique de f . La tracer en joignant ces points.

3/ Déterminer le minimum de la fonction f ainsi que la valeur pour laquelle il est atteint.

4/ Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 8 :

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle [-5 ; 7].

x	-5		-4		2		3		7
variation de f	-2	↗	0	↗	3	↘	0	↘	-1

1. Dessiner une courbe susceptible de représenter la fonction f.
2. Combien de solutions à l'équation $f(x) = 0$? Donner ces solutions.
3. Indiquer le signe de $f(x)$.

Exercice 9:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 4}$ Compléter un tableau donnant les images par f (arrondies à 10^{-2} près) des réels allant de –5 à 5 par pas de 0,5. Placer les points correspondants dans un repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ puis tracer la représentation graphique de f.

Lycée de garçons 2

<u>Exercice 10:</u>

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = -x^2 + 2x$ et $g(x) = 2x - 1$

1/ a) Donner une table de valeurs de f pour x allant de -2 à 3.

b) Tracer sur un même graphique (unité 1 cm ou 1 carreau) les courbes représentatives de f et g que l'on notera C_f et C_g.

2/ Résoudre graphiquement en expliquant :

a) l'équation : $f(x) = g(x)$.

b) l'inéquation : $f(x) < 0$.

3/ Déterminer graphiquement le maximum de la fonction f.

<u>Exercice 11 :</u>

Dans cet exercice, $f(x)$ est définie par une expression algébrique. Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition de f.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + 3x$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)(x+1)}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+1}$ h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

<u>Exercice 12:</u>

Déterminer si les fonctions f suivantes définies sur l'ensemble D sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre.

a) $D = [-3 ; 3]$ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ b) $D = [-3 ; 5]$ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

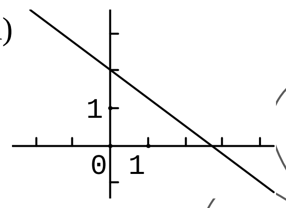
c) $D = \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ d) $D = [-4 ; 4]$ $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$

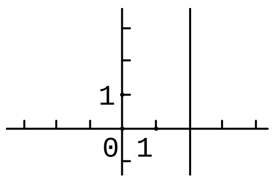
e) $D = \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ f) $D = \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x^2+x+4}$

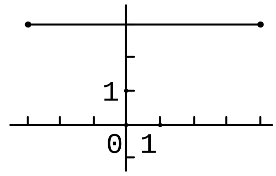
g) $D = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$

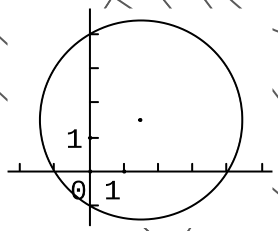
<u>Exercice 13 :</u>

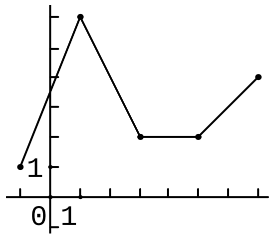
Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer si c'est celle d'une fonction , et dans ce cas, préciser son ensemble de définition.

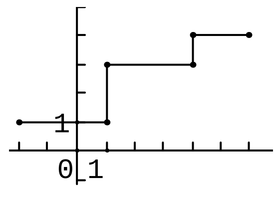
a)


b)


c)


d)


e)


f)


Lycée de garçons 2

Exercice 14 :

ABC est un triangle isocèle en A avec : AB = AC = 10 cm. H est le pied de la hauteur issue de A.
On se propose d'étudier les variations de l'aire du triangle lorsqu'on fait varier la longueur x (en cm) du côté [BC].

1. a) Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC lorsque $x = 5$, puis lorsque $x = 10$.

b) Peut-on avoir $x = 30$? Pourquoi ? Dans quel intervalle varie x ?

2. a) Exprimer AH en fonction de x.

   b) On désigne par $f(x)$ l'aire de ABC. Démontrer que : $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$.

   c) Calculer $f(x)$ pour chacune des valeurs entières de x prises dans $[0 ; 20]$ .arrondir les résultats au dixième et les présenter dans un tableau.

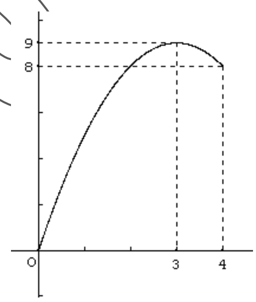
   d) Dans un repère orthogonal bien choisi, placer les points de coordonnées $(x ; f(x))$ du tableau précédent. puis construire la courbe représentative de f.

Exercice 15 :

ABCD est un trapèze rectangle de base AD = 6 cm, CB = 2 cm, de hauteur AB = 4 cm. H est le projeté orthogonal de C sur [AD]. Un point M décrit le segment [AB] et on pose AM = x.
La parallèle à (AD) passant par M coupe [CD] en N et la parallèle à (AB) passant par N coupe [AD] en P.

1. a) Démontrer que le triangle CHD est un triangle rectangle isocèle.
   b) Démontrer que AMNP est un rectangle et NPD un triangle rectangle isocèle.
2. On appelle $f(x)$ l'aire du rectangle AMNP lorsque x décrit l'intervalle $[0 ; 4]$.
   a) Montrer que $f(x) = x(6 - x)$ et vérifier que $f(x) = 9 - (x - 3)^2$.
   b) Compléter le tableau suivant :

longueur AM, x	0	1	2	2,5	3	4
aire de AMNP, $f(x)$						



3. Le graphique ci-contre est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
   Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

   a) Lorsque AM = $\frac{1}{4}$ AD, quelle est l'aire de AMNP ?

   b) Pour quelle position de M l'aire du rectangle AMNP semble-t-elle maximale ?

   c) Sur quel segment faut-il choisir le point M pour que l'aire du rectangle soit supérieure ou égale à 8 cm² ?

   d) Vérifier qu'il existe deux points M pour lesquels l'aire du rectangle est égale à $\frac{17}{2}$ cm².

4. Répondre aux questions suivantes en choisissant pour $f(x)$ l'expression la mieux adaptée.
   a) Démontrer que $f(x) \leq 9$. Peut-on affirmer cette fois que l'aire du rectangle est maximal lorsque $x = 3$? Quelle est la nature de AMNP lorsque $x = 3$?

   b) Démontrer que l'aire du rectangle AMNP est égale à $\frac{17}{2}$ cm² lorsque $x = \frac{6 - \sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{6 + \sqrt{2}}{2}$.

Bonne Chance.

Lycée de garçons 2