

EX03:

$$E_\theta = z^2 - 6 \cos \theta z + 4 + 5 \cos^2 \theta = 0$$

a) Résolvons l'équation E_θ :

$$\begin{aligned} \Delta' &= 9 \cos^2 \theta - 4 - 5 \cos^2 \theta \\ &= 4 \cos^2 \theta - 4 = -4 \sin^2 \theta \\ &= (2i \sin \theta)^2 \text{ donc} \end{aligned}$$

$$z = 2i \sin \theta$$

Les solutions sont

$$z_1 = 3 \cos \theta + 2i \sin \theta$$

$$z_2 = 3 \cos \theta - 2i \sin \theta$$

$\forall \theta \in [0; \pi[$ $\sin \theta \geq 0$ donc

$\forall \theta \in [0; \pi[$ $\text{Im}(z_1) \geq 0$

b) $E_\theta = 0$ admet des solutions doubles

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$$

$$\theta \in [0; \pi[$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$

dans le cas $z_{A_1} = 3$

$$z_{A_2} = -3$$

admet des solutions imaginaires pures $\Leftrightarrow \cos \theta = 0$ et $\theta \in [0; \pi[$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

dans le cas $z_{B_1} = 2i$; $z_{B_2} = -2i$

$$2^o) \quad z_{\pi_1} = 3 \cos \theta + 2i \sin \theta ; \quad z_{\pi_2} = 3 \cos \theta - 2i \sin \theta$$

$$\begin{cases} x_{\pi_1} = 3 \cos \theta \\ y_{\pi_1} = 2 \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x_{\pi_1}}{3}\right)^2 = \cos^2 \theta \\ \left(\frac{y_{\pi_1}}{2}\right)^2 = \sin^2 \theta \end{cases}$$

donc :

$$\frac{x_{\pi_1}^2}{3^2} + \frac{y_{\pi_1}^2}{2^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

de même $\frac{x_{\pi_2}^2}{3^2} + \frac{y_{\pi_2}^2}{2^2} = 1$

donc π_1 et π_2 appartiennent le même ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

donc Γ est une ellipse de centre 0 et d'équation cartésienne

$$\boxed{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1}$$

b) Γ est une ellipse de centre 0 et des sommets $A(3; 0)$, $A'(-3; 0)$

$B(0; 2)$, $B'(0; -2)$ et de foyers

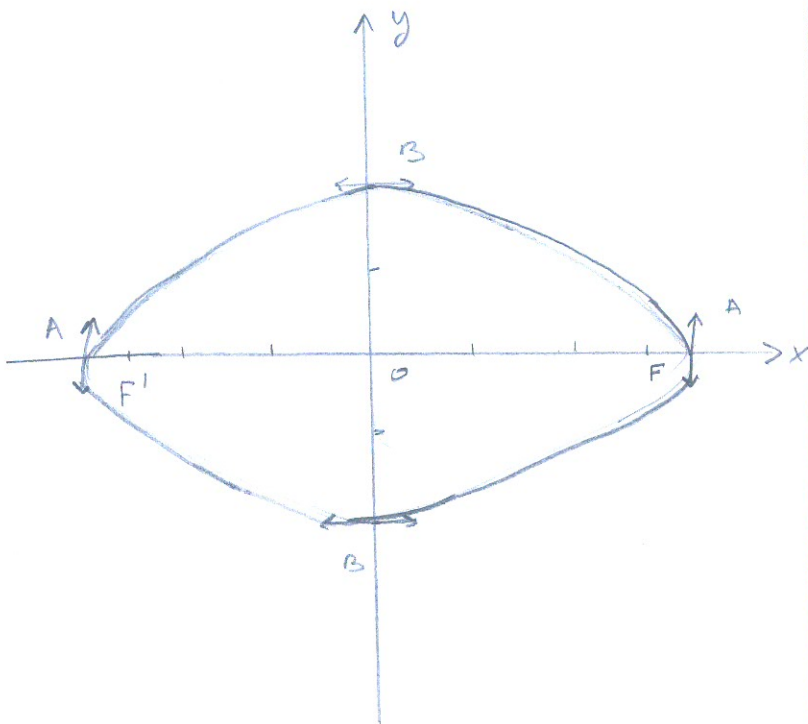
$F(\sqrt{5}; 0)$, $F'(-\sqrt{5}; 0)$ d'axe

focal $(0; i)$ de directrices D

$$D: x = \frac{9}{\sqrt{5}} = D; x = -\frac{9}{\sqrt{5}}$$

Suite Exo 3:

et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$



$$3) f(M) = M' \Leftrightarrow M' = \text{car} \begin{bmatrix} A & B & C \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$z' = \frac{-4z_A + 2z_B + 3z}{-4 + 2 + 3}$$

$$= \frac{-4 \times 3 + 2 \times 2i + 3z}{1}$$

donc: $z' = 3z - 12 + 4i$

$a, z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $z = az + b$

donc f est une homothétie de rapport $k=3$ et de centre z d'affixe

$$z_r = \frac{-12 + 4i}{1-3} = 6 - 2i$$

b) $\Gamma' = f(\Gamma)$

$M(x'iy') \in \Gamma', M(xiy) \in \Gamma$

tel que $f(M) = M'$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = 3(4 + iy) - 12 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 12 \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + 12}{3} \\ y = \frac{y' - 4}{3} \end{cases}$$

d'après 2-a

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x' + 12)^2}{9^2} + \frac{(y' - 4)^2}{6^2} = 1$$

donc l'équation cartésienne de Γ est

$$\boxed{\frac{x' + 12}{9^2} + \frac{(y' - 4)^2}{6^2} = 1}$$