Olympiades Nationales de Mathématiques 2017

Sélections régionales **1er tour**	**Niveau 4AS**	**05 février 2017** **Durée 3 h**

Solution

proposée par AMIMATHS

Exercice 1 (5 points)

Soit

$$A=(x-1)^2-(x-2)^2+(x-3)^2-(x-4)^2+(x-5)^2-(x-6)^2+(x-7)^2-(x-8)^2+(x-9)^2-(x-10)^2$$

1) Calculer A pour x = 0.

2) Simplifier A.

Correction

$$A=(x-1)^2-(x-2)^2+(x-3)^2-(x-4)^2+(x-5)^2-(x-6)^2+(x-7)^2-(x-8)^2+(x-9)^2-(x-10)^2$$

1) Pour x=0,

$$A=(0-1)^2-(0-2)^2+(0-3)^2-(0-4)^2+(0-5)^2-(0-6)^2+(0-7)^2-(0-8)^2+(0-9)^2-(0-10)^2$$

$$A=(-1)^2-(-2)^2+(-3)^2-(-4)^2+(-5)^2-(-6)^2+(-7)^2-(-8)^2+(-9)^2-(-10)^2$$

$$A=1-4+9-16+25-36+49-64+81-100$$

$$A=-55$$

2) Simplification

$$A=(x-1)^2-(x-2)^2+(x-3)^2-(x-4)^2+(x-5)^2-(x-6)^2+(x-7)^2-(x-8)^2+(x-9)^2-(x-10)^2$$

$$A=\left[x-1-x+2\right]\left[x-1+x-2\right]+\left[x-3-x+4\right]\left[x-3+x-4\right]+\left[x-5-x+6\right]\left[x-5+x-6\right]+$$
$$\left[x-7-x+8\right]\left[x-7+x-8\right]+\left[x-9-x+10\right]\left[x-9+x-10\right]$$

$$A=2x-3+2x-7+2x-11+2x-15+2x-19$$

$$A=10x-55$$

Exercice 2 (5 points)

1) Montrer que $\sqrt{10+\sqrt{19}}+\sqrt{10-\sqrt{19}}=\sqrt{38}$

2) Déterminer un réel x tel que $\sqrt{10+\sqrt{19}}-\sqrt{10-\sqrt{19}}=\sqrt{x}$ **.**

Correction

1) Pour montrer que $\sqrt{10+\sqrt{19}}+\sqrt{10-\sqrt{19}}=\sqrt{38}$ **, On remarque que les deux membres sont positifs, donc il suffit de montrer que leurs carrés sont égaux :**

On a

AMIMATHS

$$\left(\sqrt{10+\sqrt{19}}+\sqrt{10-\sqrt{19}}\right)^2=\left(\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^2+2\sqrt{10+\sqrt{19}}\times\sqrt{10-\sqrt{19}}+\left(\sqrt{10-\sqrt{19}}\right)^2$$

$$=10+\sqrt{19}+2\sqrt{\left(10+\sqrt{19}\right)\left(10-\sqrt{19}\right)}+10-\sqrt{19}$$

$$=20+2\sqrt{10^2-\left(\sqrt{19}\right)^2}=20+2\sqrt{100-19}=20+2\sqrt{81}$$

$$=20+2\times9=20+18=38=\left(\sqrt{38}\right)^2$$

Alors $\left(\sqrt{10+\sqrt{19}}+\sqrt{10-\sqrt{19}}\right)^2=\left(\sqrt{38}\right)^2$

2) Calcul de x

$$\sqrt{10+\sqrt{19}}-\sqrt{10-\sqrt{19}}=\sqrt{x}\Rightarrow\left(\sqrt{10+\sqrt{19}}-\sqrt{10-\sqrt{19}}\right)^2=\sqrt{x}^2.$$

$$\Rightarrow x=\left(\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^2-2\sqrt{10+\sqrt{19}}\times\sqrt{10-\sqrt{19}}+\left(\sqrt{10-\sqrt{19}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x=10+\sqrt{19}-2\sqrt{\left(10+\sqrt{19}\right)\left(10-\sqrt{19}\right)}+10-\sqrt{19}$$

$$\Rightarrow x=20-2\sqrt{10^2-\left(\sqrt{19}\right)^2}=20-2\sqrt{100-19}=20-2\sqrt{81}$$

$$\Rightarrow x=20-2\times9=20-18=2$$

<u>Exercice 3 (5 points)</u>

ABC est un triangle tel que : AC = 13, AB = 14 et BC = 15.
L'unité de longueur est le centimètre. Soit H, J, K les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets C, A, B. On pose BJ = x.

1. a) Ecrire deux égalités de Pythagore faisant intervenir AJ.
b) Déduire x de la question a. puis calculer AJ.
2) Calculer BK et CH.
3) Proposer un triangle dont les trois côtés et les trois hauteurs ont pour longueurs des nombres entiers.

Correction

1) a) On pose x = BJ et on applique le théorème de Pythagore dans les triangles ABJ et ACJ rectangles en J, On obtient :

$AJ^2 = 14^2 - x^2 = 196 - x^2$ **et** $AJ^2 = 13^2 - (15 - x)^2 = 169 - 225 + 30x - x^2 = -56 + 30x - x^2$

b) D'après la question a) on obtient l'équation :

$$\Rightarrow 196-x^2=-56+30x-x^2\Rightarrow 30x=196+56\Rightarrow 30x=252\Rightarrow x=\frac{252}{30}\Rightarrow x=\frac{42}{5}$$

On trouve alors que :

$$AJ^2=196-x^2\Rightarrow AJ^2=196-8,4^2\Rightarrow AJ^2=196-70,56$$

$$\Rightarrow AJ^2=125,44\Rightarrow AJ=\sqrt{125,44}\Rightarrow AJ=11,2$$

2) Calcul de BK et CH.

Aire de triangle $ABC = \frac{AC \times BK}{2} = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{BC \times AJ}{2}$

$AC \times BK = AB \times CH = BC \times AJ \Rightarrow 13 \times BK = 14 \times CH = 15 \times 11,2 = 168$

$\Rightarrow BK = \frac{168}{13}$ et $CH = \frac{168}{14} = 12$

3) On sait que AB=14cm, AC=13cm, BC=15cm, $AJ = 11,2 = \frac{112}{10} = \frac{56}{5}$

$CH = 12cm, \ BK = \frac{168}{13}$

En multipliant les côtés du triangle ABC par le plus petit multiple commun de (5 ;13) qui est égal à 5×13 = 65, on obtient un triangle dont les trois côtés et les trois hauteurs ont pour longueurs des nombres entiers

AB=910cm, AC=845cm, BC=975cm,

$AJ = 728cm$, $CH = 780cm$, $BK = 840$

Exercice 4 (5 points)

Dans le carré ci-contre (carré magique), les nombres inscrits dans les cases sont des réels strictement positifs. Le produit des nombres inscrits dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacune des deux diagonales est le même. Déterminer f.

1	64	d	g
a	4	16	4
8	2	e	h
b	c	f	32

Correction

- ✓ **1×a×8×b=4×16×4×a, d'où b=32**
- ✓ **1×4×e×32=8×2×e×h, d'où h=8**
- ✓ **1×64×d×g=b×2×16×g donc 2d=b, d'où d=16**
- ✓ **d×16×e×f=8×2×e×h donc 16×f=h, d'où f = 0,5**

Fin.