Olympiades Nationales de Mathématiques 2017

Phase finale
$3^{\text{ème}}$ tour

Niveau 4AS

19 mars 2017
Durée 4 h

Solution

proposée par AMIMATHS

Exercice 1 (4 points)

1) Calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ en déduire la valeur de $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

2) Trouver 4 entiers naturels a, b, c et d tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$

3) Trouver 5 entiers naturels a, b, c, d et e tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$

Une correction

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=1$; (réduction au même dénominateur).

On multiplie par $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\times 1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

2) On a $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$, donc en ajoutant $\frac{1}{2}$ on obtient $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$.

Alors les quatre entiers $a=2, b=4, c=6$ et $d=12$ vérifient $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$

3) On a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$. On multiplie par $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

Donc $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}$. On ajoute $\frac{1}{2}$:

On obtient $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=1$

Alors les cinq entiers $a=2, b=4, c=8$, $d=12$ et $e=24$ vérifient $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$

Exercice 2 (4 points)

Soit $X=\sqrt{1+a+2\sqrt{a}}+\sqrt{1+a-2\sqrt{a}}$, $a\in\mathbb{R}_+$

1) Montrer que $(X^2-4)(X^2-4a)=0$

2) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

3) Simplifier $\sqrt{1000000+2\sqrt{999999}}+\sqrt{1000000-2\sqrt{999999}}$

.

AMIMATHS

Une correction

$$X^2=\left(\sqrt{1+a+2\sqrt{a}}+\sqrt{1+a-2\sqrt{a}}\right)^2$$

$$X^2=1+a+2\sqrt{a}+1+a-2\sqrt{a}+2\sqrt{1+a+2\sqrt{a}}\times\sqrt{1+a-2\sqrt{a}}$$

$$X^2=2+2a+2\sqrt{\left(1+a+2\sqrt{a}\right)\left(1+a-2\sqrt{a}\right)}$$

$$X^2=2+2a+2\sqrt{(1+a)^2-\left(2\sqrt{a}\right)^2}$$

$$X^2=2+2a+2\sqrt{1+2a+a^2-4a}$$

$$X^2=2+2a+2\sqrt{1-2a+a^2}$$

$$X^2=2+2a+2\sqrt{(1-a)^2}$$

$$X^2=2+2a+2|1-a|$$

$$\begin{aligned}\left(X^2-4\right)\left(X^2-4a\right)&=\left(2a+2|1-a|-2\right)\left(2-2a+2|1-a|\right)\\&=4\left(|1-a|+(a-1)\right)\left(|1-a|-(a-1)\right)\\&=4\left(|1-a|^2-(a-1)^2\right)\\&=4\left((1-a)^2-(a-1)^2\right)\\&=4\left((a-1)^2-(a-1)^2\right)\\&=0\end{aligned}$$

2. $X=\sqrt{1+a+2\sqrt{a}}+\sqrt{1+a-2\sqrt{a}}$ donc $X\in\mathbb{R}_+$, (positif).

$$\begin{aligned}\left(X^2-4\right)\left(X^2-4a\right)=0&\Leftrightarrow X^2-4=0 \quad \text{ou} \quad X^2-4a=0\\&\Leftrightarrow X^2=4 \quad \text{ou} \quad X^2=4a\\&\Leftrightarrow \begin{cases}X=2\in\mathbb{R}_+\\X=-2\notin\mathbb{R}_+\end{cases} \text{ou} \quad \begin{cases}X=2\sqrt{a}\in\mathbb{R}_+\\X=-2\sqrt{a}\notin\mathbb{R}_+\end{cases}\end{aligned}$$

Donc les valeurs possibles de X sont 2 et $2\sqrt{a}$.

Plus précisément :

$$X=\sqrt{(1+\sqrt{a})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{a})^2}\Leftrightarrow X=\left|1+\sqrt{a}\right|+\left|1-\sqrt{a}\right|$$

$$\Rightarrow X=1+\sqrt{a}+\left|1-\sqrt{a}\right|=\begin{cases}2 & \text{si } a\le 1\\2\sqrt{a} & \text{si } a\ge 1\end{cases}$$

3) Dans l'expression $X=\sqrt{1+a+2\sqrt{a}}+\sqrt{1+a-2\sqrt{a}}$ en remplaçant a par 999999 on obtient le nombre $N=\sqrt{1000000+2\sqrt{999999}}+\sqrt{1000000-2\sqrt{999999}}$.

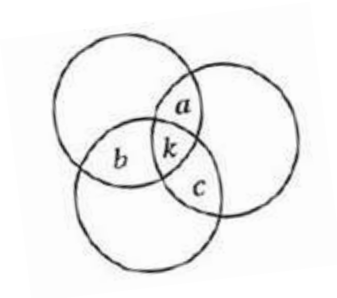
$$N=\sqrt{1+999999+2\sqrt{999999}}+\sqrt{1+999999-2\sqrt{999999}}$$

Comme 999999 est supérieur à 1; on a

Donc $N=2\sqrt{a}=2\sqrt{999999}=6\sqrt{111111}$

Exercice 3 (4 points)

Trois tapis (que l'on peut supposer circulaires) ont une aire totale de $200\,\text{m}^2$. En les superposant partiellement, ils recouvrent une surface de $140\,\text{m}^2$. La partie recouverte par exactement deux tapis à une aire totale de $24\,\text{m}^2$. Quelle est l'aire de la partie recouverte par les trois tapis superposés ?



Une correction

On a : $\begin{cases} a+b+c=24 \\ a+b+c+2k=200-140=60 \end{cases}$

donc $2k = 60 - 24 = 36$ d'où $k = 18$.

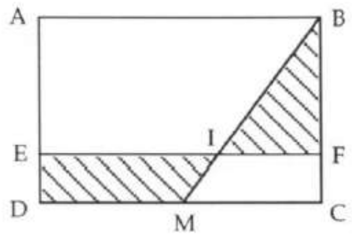
Donc l'aire de la partie recouverte par les trois tapis superposés est 18 cm².

Exercice 4 (4 points)

Le rectangle ABCD a pour dimensions a et b.

E est le point de [AD] tel que $DE=\frac{1}{4}AD$. La parallèle à (DC) passant par E coupe (BC) en F. Soit M le milieu de [DC].

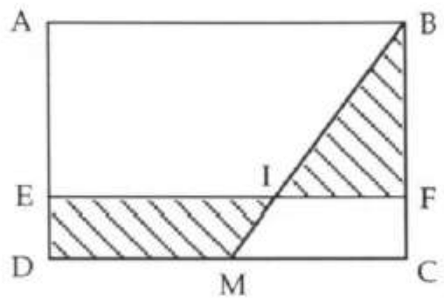
La droite (BM) coupe (EF) en I. Montrer que le trapèze EIMD et le triangle BIF ont la même aire.



Une correction

On exprime les distances DE, BF, DM, IF, et EI en fonction de a et b (AB = a ; BC = b)

- $DE=\frac{1}{4}AD \Rightarrow \boxed{DE=\frac{b}{4}}$



- $(AB)//(EF)//(DC)$ et $DE=\frac{1}{4}AD$

  D'après le théorème de Thalès $FC=\frac{1}{4}BC$

  donc $BF=\frac{3}{4}BC \Rightarrow \boxed{BF=\frac{3b}{4}}$

- M est le milieu de [DC] donc $DM=MC=\frac{DC}{2}$ d'où $DM=MC=\frac{a}{2}$

- Les triangles BFI et BCM forment une configuration de Thalès et $BF=\frac{3}{4}BC$

  donc $IF=\frac{3}{4}MC \Rightarrow IF=\frac{3}{4}\times\frac{a}{2}=\frac{3a}{8} \Rightarrow \boxed{IF=\frac{3a}{8}}$

- $EI = EF - IF \quad \Rightarrow EI=a-\frac{3a}{8}=\frac{8a}{8}-\frac{3a}{8} \Rightarrow \boxed{EI=\frac{5a}{8}}$

❖ Aire de (MIED) $=\frac{(EI+DM)\times DE}{2}=\frac{\left(\frac{5a}{8}+\frac{a}{2}\right)\times\frac{b}{4}}{2}=\frac{\frac{9a}{8}\times\frac{b}{4}}{2}=\frac{9ab}{64}$

❖ Aire de (BIF) $=\frac{BF\times IF}{2}=\frac{\frac{3b}{4}\times\frac{3a}{8}}{2}=\frac{\frac{9ab}{32}}{2}=\frac{9ab}{64}$.

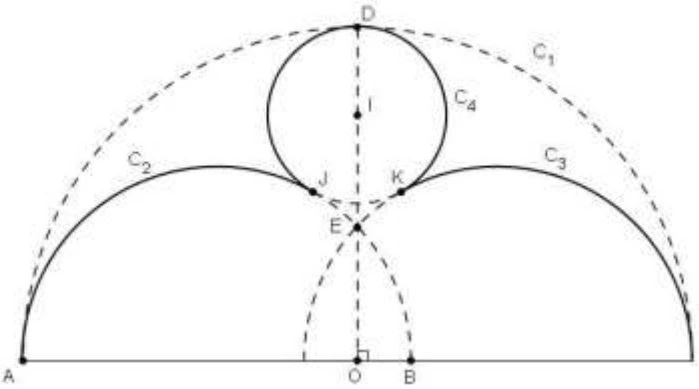
Donc le trapèze EIMD et le triangle BIF ont la même aire.

AMIMATHS

Exercice 5 (4 points)

Le demi-cercle C_1 de centre O passant par le point A et le demi-cercle C_2 de diamètre [AB] sont tangents en A. La droite (OD) est un axe de symétrie de la figure et le point D appartient à C_1. Le demi–cercle C_3 est le symétrique de C_2 par rapport à (OD).

Le point E est l'intersection du segment [OD] et de C_2. On donne OA = 10 et DE = 6



1) Montrer que $\dfrac{AO}{AE}=\dfrac{AE}{AB}$.

2) Calculer le rayon de C_2.

3) C_4 est le cercle de centre I passant par le point D.
C_4 est tangent à C_1 en D, tangent à C_2 en J, et tangent à C_3 en K. Calculer le rayon de C_4 .

Une correction

1)

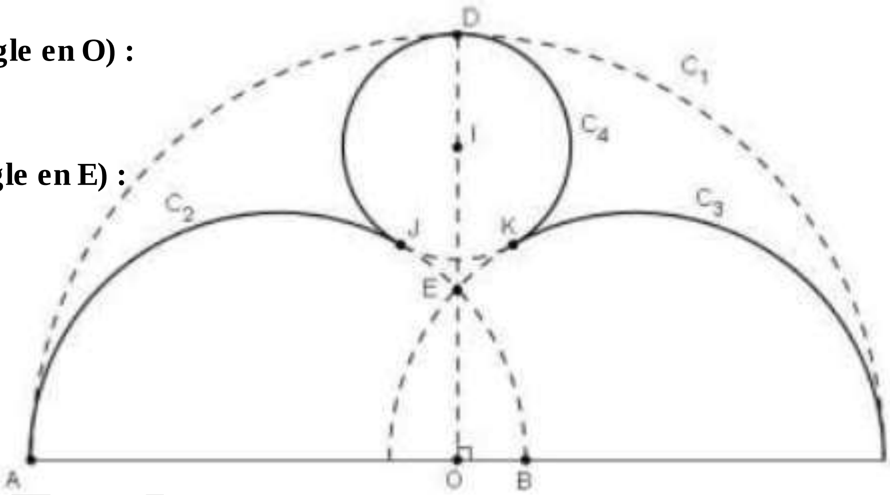
- Dans le triangle AOE (rectangle en O) :

$$\cos(EAO)=\frac{AO}{AE}$$

- Dans le triangle ABE (rectangle en E) :

$$\cos(EAB)=\frac{AE}{AB}$$

D'où $\dfrac{AO}{AE}=\dfrac{AE}{AB}$



2)

D'après 1) on a $AB=\dfrac{AE^2}{AO}$

Comme $E\in[OD]$, on a $OE=OD-DE=10-6=4$

Dans le triangle AOE rectangle en O, $AE^2=AO^2+OE^2=10^2+4^2=116$

D'où $AE=\sqrt{116}$, Donc $AB=\dfrac{AE^2}{AO}=\dfrac{116}{10}=11,6$ Alors le rayon de C_2 est égal à $\dfrac{AB}{2}=5,8$

3) Soit le centre Ω de C_2 et soit r le rayon de C_4 ;

Comme C_2 et C_4 sont tangents en J alors les points Ω, J et I sont alignés, par conséquent :

$\Omega I=\Omega J+JI=5,8+r$

Or $I\in[OD]$ donc $OI=OD-ID=10-r$

$\Omega\in[OA]$ donc $\Omega O=AO-A\Omega=10-5,8=4,2$

Le triangle ΩOI est rectangle en O, d'où :

$\Omega I^2=\Omega O^2+OI^2$ soit $(5,8+r)^2=4,2^2+(10-r)^2$

En développant on obtient : $31,6\times r=84$ alors $r=\dfrac{84}{31,6}=\dfrac{210}{79}$

Fin.