Olympiades Nationales de Mathématiques 2018

Sélections régionales 1^{er} tour	Niveau 7C	28 janvier 2018 Durée 3 h

Solution

proposée par AMIMATHS

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1 : (20 points)

ABCD est un carré direct de coté 1, (Q) est un quart de cercle de centre C et passant par B et D. M est un point variable du segment [AB] distinct de A et B. Par le point M on trace la tangente à (Q) qui coupe le coté [AD] en N. Le point de contact de la tangente avec (Q) est nommé T.
On pose $AM = x$ et $AN = y$ avec $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$

1. a) Faire une figure et démontrer que : $MN = 2 - x - y$

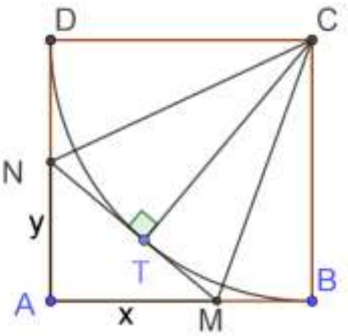
b) En déduire que $y = 2 + \frac{2}{x-2}$

2) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale. Calculer cette distance.

3) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMN est maximale. Calculer cette aire.

Solution

1° a) La construction de la figure



Barème :	
1° a)Figure :	3
Isométrie des triangles :	1
Démonstration de l'égalité	1
1° b) Utilisation de 1° a) :	2
Expression demandée :	2
2° L'écriture MN =f(x)	2
Etude de f	1
Valeur minimale de MN	1
3° Formule de l'aire a	1
Ecriture de a comme fonction en x	2
Etude de la fonction a	1
Valeur maximale de a	1
Présentation + idées	2

CTM et CBM sont deux triangles rectangles de même hypothénuse CM.
En plus $CT = CB$ (égale au rayon du cercle).
D'où les triangles CTM et CBM sont isométriques, d'où $MB = TM$.
De même les triangles CTN et CDN sont isométriques (même raisonnement), d'où $TN = DN$.
On a $MN = TM + TN = BM + DN = (AB - AM) + (AD - AN) = (1 - x) + (1 - y) = 2 - x - y$.

b) On a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$. D'après le théorème de Pythagore on a $AN^2 + AM^2 = MN^2$. En utilisant la question précédente on trouve $x^2 + y^2 = (2 - x - y)^2 = 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy$.
Cette égalité donne $4 - 4x - 4y + 2xy = 0$, et par conséquence :

$$y(x-2)=2x-2 \Rightarrow y=\frac{2x-2}{x-2}$$
$$y=\frac{2(x-2)+2}{x-2}$$
$$y=2+\frac{2}{x-2}$$

2) D'après la question 1) on a :

$$\begin{aligned} MN &= 2-x-y \\ &= 2-x-\left(2+\frac{2}{x-2}\right) \\ &= -x-\frac{2}{x-2} \\ &= \frac{-x^2+2x-2}{x-2} \end{aligned}$$

Soit $f(x)=-x-\frac{2}{x-2}=\frac{-x^2+2x-2}{x-2}$ où $x\in[0,1]$. La dérivée f' de f est définie par :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{2-(x-2)^2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{\left(x-2+\sqrt{2}\right)\left(-x+2+\sqrt{2}\right)}{(x-2)^2} \end{aligned}.$$

Comme $x\in[0,1]$ alors $-x+2+\sqrt{2}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2+\sqrt{2}$ qui s'annule et change de signe en $x_0=2-\sqrt{2}$ et on a alors le tableau de variation de f :

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-2+2\sqrt{2}$	↗	1

Ce qui montre que la distance MN est minimale pour $x=2-\sqrt{2}$ et la valeur minimale de cette distance est $-2+2\sqrt{2}$.

3) Le triangle AMN étant rectangle en A, son aire est donc

$$a(x)=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\left(2+\frac{2}{x-2}\right)=\frac{x^2-x}{x-2}=x+\frac{x}{x-2}=x+1+\frac{2}{x-2} \text{ avec } x\in[0,1].$$

La dérivée de la fonction a est $a'(x)=1-\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-2}{(x-2)^2}=\frac{\left(x-2+\sqrt{2}\right)\left(x-2-\sqrt{2}\right)}{(x-2)^2}$ et son tableau de variation est :

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$a'(x)$		$+$	0	$-$	
$a(x)$	0	↗	$3-2\sqrt{2}$	↘	0

Donc l'aire du triangle AMN est maximale si et seulement si $x=2-\sqrt{2}$ et cette aire maximale est égale à $3-2\sqrt{2}$

Exercice 2 ; (20 points)

Pour tout réel $a \neq 0$, on considère les matrices $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ **et** $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$

1) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall b \in \mathbb{R}^*$ on a : $M_a \times M_b = M_{ab}$, $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$, $M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$ **et** $N_b \times M_a = N_{ab}$.

2) Que peut-on dire de $(M_a)^n$? $(N_a)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$?

Solution

---

1. a) $M_a.M_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab - \frac{1}{ab}\right) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} = M_{ab} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_a.M_b = M_{ab}}$

b) $N_a \times N_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix}$

$$N_a \times N_b = \begin{pmatrix} ab - ab + \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab - \frac{a}{b} - ab + \frac{b}{a}\right) \\ 0 & -ab + \frac{a}{b} + ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) \\ 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} = M_{\frac{b}{a}}$$

d'où $\boxed{N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}}$

c) $M_a \times N_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} =$

$$M_a \times N_b = \begin{pmatrix} ab - ab + \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab - \frac{a}{b} - ab + \frac{b}{a}\right) \\ -\frac{b}{a}\sqrt{3} & \frac{-b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) \\ -\frac{b}{a}\sqrt{3} & \frac{-b}{a} \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}}$

d) $N_b \times M_a = \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

$$N_b \times M_a = \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab - \frac{b}{a} + \frac{b}{a} - \frac{1}{ab}\right) \\ -ab\sqrt{3} & -ab + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab - \frac{1}{ab}\right) \\ -ab\sqrt{3} & -ab \end{pmatrix} = N_{ab}$$

d'où $\boxed{N_b \times M_a = N_{ab}}$

Barème :	
1° Mobilisation minimale des acquis	**2**
$M_a \times M_b = M_{ab}$	**3**
$N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$:	**3**
$M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$:	**2**
$N_b \times M_a = N_{ab}$	**2**
2° Calcul de M_a^2 et N_a^2	**2**
Démonstration	**2**
Distinction des cas pour N_a^n	**2**
Présentation + idées	**2**

2° D'après 1) on a : $M_a.M_b = M_{ab}$ **, d'où** $M_a.M_a = M_{a^2}$ **et on démontre alors par récurrence que pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(M_a)^n = M_{a^n}}$**. De même comme** $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$ **alors on a** $N_a \times N_a = M_{\frac{a}{a}} = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ **et on démontrer par récurrence que pour tout** $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{(N_a)^{2p} = I}$ **et on en déduit que** $\boxed{(N_a)^{2p+1} = N_a}$.

Exercice 3 : (20 points)

1) Resoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x-2y=1$.

2.a) Montrer que, pour tout entier naturel n, le couple $(14n+3,21n+4)$ est solution de (E).

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$ les deux nombres $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

3.a) Soit $d=\text{pgcd}(21n+4,2n+1)$. Justifier que $d=1$ ou $d=13$.

b) Montrer que $d=13 \Leftrightarrow n\equiv 6\,[13]$.

4) Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on note $A=21n^2-17n-4$ et $B=28n^3-8n^2-17n-3$.

a) Montrer que les deux nombres A et B sont divisibles par $n-1$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de n, le $\text{pgcd}(A,B)$.

Solution

1) Le couple $(1,1)$ est une solution particulière de (E). Pour tout couple (x,y) solution de (E) on a

$\begin{cases}3x-2y=1\\3\times1-2\times1=1\end{cases}$ d'où $3(x-1)=2(y-1)$.

Alors $\begin{cases}2|3(x-1)\\3|2(y-1)\\3\wedge 2=1\end{cases}$ et d'après le théorème de Gauss on a $\begin{cases}2|(x-1)\\3|(y-1)\end{cases}$

ce qui donne : $x=2m+1$ et $y=3m+1$, $m\in\mathbb{Z}$

On vérifie la réciproque facilement.

La solution générale (x,y) de (E) est $(2m+1,3m+1)$, $\forall m\in\mathbb{Z}$.

Barème :	
1° Mobilisation minimale des acquis	2
Solution particulière	2
Solution générale	2
Raisonnement	2
2° a)	1
2° b)	1
3° a)	2
3° b)	2
4° a)	2
4° b)	2
Présentation + idées	2

2.a) Comme, pour tout entier n on a $3(14n+3)-2(21n+4)=1$ alors $(14n+3,21n+4)$ est une solution de (E).

b) La question précédente montre alors que le pgcd des deux nombres $14n+3$ et $21n+4$ est 1 (théorème de Bézout), c'est-à-dire que $\forall n\in\mathbb{N}$ les deux nombres $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

3.a) Soit $d=\text{pgcd}(21n+4,2n+1)$.

On sait que $21n+4=10(2n+1)+n-6$ et $2n+1=2(n-6)+13 \Rightarrow 21(2n+1)-2(21n+4)=13$

Par conséquence d divise 13 et comme les diviseurs positifs de 13 ne sont que 1 et 13, on en déduit que $d=1$ ou $d=13$.

b) Supposons que $d=13$. Comme d divise $21n+4$ et $2n+1$ alors d divise $n-6$, donc $13|n-6$ c'est-à-dire que $n\equiv 6\ [13]$.

Réciproquement si $n\equiv 6\ [13]$ alors $n=13k+6$ d'où $21n+4=13(21k+10)$ et $2n+1=13(2k+1)$, donc 13 divise $21n+4$ et $2n+1$ alors 13 divise d et comme d est soit 1 soit 13 alors on a d=13.

D'où $d=13 \Leftrightarrow n\equiv 6\,[13]$.

4) a) La factorisation des nombres A et B donne $A=(n-1)(21n+4)$ et $B=(n-1)(2n+1)(14n+3)$.

Ce qui montre que les deux nombres A et B sont divisibles par $n-1$.

b) Comme $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux alors

$\text{pgcd}(21n+4,(2n+1)(14n+3))=\text{pgcd}(21n+4,2n+1)=d$

D'où $\text{pgcd}(A,B)=(n-1)d$.

- Si $n\equiv 6\ [13]$ alors $\text{pgcd}(A,B)=13(n-1)$
- Si $n\not\equiv 6\ [13]$ alors $\text{pgcd}(A,B)=n-1$

Exercice 4 : (20 points)

Soit m un nombre complexe différent de 1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (1-i)(m+1)z - i\left(m^2+1\right) = 0 .$$

1. a) Montrer que le discriminant Δ de (E) s'écrit sous la forme $\Delta = \left[(1+i)(m-1)\right]^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

c) Déterminer, sous forme algébrique, m tel que le produit des solutions de (E) soit égal à 1.

2) Ecrire la forme trigonométrique des complexes $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$, pour $m = e^{i\theta}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$.

Solution

Soit m un nombre complexe différent de 1.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $(E) : z^2 - (1-i)(m+1)z - i\left(m^2+1\right) = 0$.

1° a) Le discriminant de (E) est

$$\Delta = \left[(1-i)(m+1)\right]^2 + 4i\left(m^2+1\right) = -2i(m+1)^2 + 4i\left(m^2+1\right) = 2i\left(-m^2 - 2m - 1 + 2m^2 + 2\right)$$

$$\Rightarrow \ \Delta = 2i\left(m^2 - 2m + 1\right) = (1+i)^2(m-1)^2 = \left[(1+i)(m-1)\right]^2$$

b) Les solutions de l'équation (E) sont donc

$$z_1 = \frac{(1-i)(m+1) - (1+i)(m-1)}{2} = 1 - im \text{ ; et}$$

$$z_2 = \frac{(1-i)(m+1) + (1+i)(m-1)}{2} = m - i .$$

c) Le produit des solutions de (E) est $p = -i\left(m^2+1\right)$.

$p = 1 \Leftrightarrow -i\left(m^2+1\right) = 1 \Leftrightarrow m^2 + 1 = \frac{1}{-i} = i \Leftrightarrow m^2 = -1 + i$ Alors $p = 1$ ssi m est une racine carrée de $-1+i$.

Si $m = x + iy$ une racine carrée de $-1+i$ alors (x , y) est une solution du système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$.

Le produit des solutions de (E) est égal à 1 ssi $m = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ou $m = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

2°) Forme trigonométrique des complexes $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$, pour $m = e^{i\theta}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$:

$z_1 = 1 - im = 1 - ie^{i\theta} = 1 + e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$. Comme $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ alors $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

D'où l'écriture trigonométrique de z_1 est $z_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

Pour z_2 on a $z_2 = m - i = e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)}$.

Puisque $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ alors $\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ et par la suite **l'écriture trigonométrique de z_2 est**

$$z_2 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Barème :

Mobilisation minimale des acquis	3
1° a)	3
1° b)	3
1° c)	4
2°	5
Présentation + idées	2

Exercice 5 : (20 points)

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1) Calculer les dérivées première, seconde et troisième de f .

2) Détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n de f en fonction de n.

Solution

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1) La fonction f est infiniment dérivable sur son domaine de définition $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

Sa dérivée première est $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$,

sa dérivée seconde est $f''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}$ et,

sa dérivée troisième est $f'''(x)=\dfrac{-18}{(x-1)^4}$

Barème :	
Mobilisation minimale des acquis	**3**
1° $f'(x)$	**3**
$f''(x)$	**3**
$f'''(x)$	**3**
2° Conjecture	**3**
Démonstration	**3**
Présentation + idées	**2**

2) Pour détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n de f en fonction de n, on remarque que :

$$f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}=\frac{(-1)^1\times3\times1!}{(x-1)^{1+1}}\ ;$$

$$f''(x)=\frac{6}{(x-1)^3}=\frac{(-1)^2\times3\times2!}{(x-1)^{2+1}}$$

et que $f'''(x)=\dfrac{-18}{(x-1)^4}=\dfrac{(-1)^3\times3\times3!}{(x-1)^{3+1}}$.

Montrons donc par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{3\times(-1)^n\times n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Cette proposition est vraie pour $n=1$ car vraie pour $n\in\{1,2,3\}$.

Supposons qu'elle est vraie pour une valeur $p\geq1$ c'est-à-dire que $f^{(p)}(x)=\dfrac{3\times(-1)^p\times p!}{(x-1)^{p+1}}$.

On sait que $f^{(p+1)}(x)=\left(f^{(p)}(x)\right)'$ d'où $f^{(p+1)}(x)=-(p+1)\dfrac{3\times(-1)^p\times p!}{(x-1)^{p+2}}=\dfrac{3\times(-1)^{p+1}\times(p+1)!}{(x-1)^{p+2}}$

Ce qui achève la démonstration et permet de conclure que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n de f est calculée par ;

$$\boxed{f^{(n)}(x)=\frac{3\times(-1)^n\times n!}{(x-1)^{n+1}}}\ .$$

Fin.