Corrigé proposé par AMIMATHS

Exercice 1 (25 points)

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & -1\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

1.a) Calculer $A-J$ et J^2.

b) Démontrer que pour tout entier n avec $n\geqslant 3$, on a : $J^n=0_3$.

2.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n\geqslant 1$, on a : $A^n=(-1)^n\left(I_3-nJ+\dfrac{n(n-1)}{2}J^2\right)$

b) En déduire la matrice A^n en fonction de n pour tout entier $n\geqslant 1$.

Corrigé

1. a) $A-J=-I_3$ et $J^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) On a $J^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0_3$ et si $J^n=0_3$ alors $J^{n+1}=0_3\times J=0_3$

2. a) D'après 1. a) on a $A=J-I_3=(-1)^1\left(I_3-J+0\times J^2\right)$ donc la proposition est vraie pour $n=1$.

Si elle est vraie pour n on aura alors

$$
\begin{aligned}
A^{n+1}&=A\times A^n\\
&=\left(-I_3+J\right)(-1)^n\left(I_3-nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2\right)\\
&=(-1)^{n+1}\left(I_3-nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2\right)+(-1)^n\left(J-nJ^2+\frac{n(n-1)}{2}J^3\right)\\
&=(-1)^{n+1}\left(I_3-nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2-J+nJ^2\right)\\
&=(-1)^{n+1}\left(I_3-(n+1)J+\frac{n(n+1)}{2}J^2\right)
\end{aligned}
$$

Alors la proposition est vraie pour tout entier $n\geqslant 1$

b) Donc on a $A^n=(-1)^n\left(I_3-nJ+\dfrac{n(n-1)}{2}J^2\right)\Rightarrow A^n=(-1)^nI_3-(-1)^n nJ+\dfrac{(-1)^n n(n-1)}{2}J^2$

$$
A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ 0 & (-1)^n & 0\\ 0 & 0 & (-1)^n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ (-1)^n n & -2n(-1)^n & -(-1)^n n\\ -(-1)^n n & 4n(-1)^n & 2n(-1)^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -\dfrac{(-1)^n n(n-1)}{2} & 0 & 0\\ (-1)^n n(n-1) & 0 & 0\end{pmatrix}
$$

$$
A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ \dfrac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2} & (2n+1)(-1)^n & n(-1)^{n+1}\\ (-1)^n n(n-2) & 4n(-1)^{n+1} & (-1)^n(1-2n)\end{pmatrix}
$$

Barème Exercice 1

1.a)	10 pts (5+5)
b)	4 pts
2.a)	5 pts
b)	3 pts
Raisonnement & Présentation	3 pts

Exercice 2 (25 points)

Trouver tous les entiers n strictement positifs pour lesquels 2^n divise 5^n-1

Barème Exercice 2

Une réponse complète et correcte	25 pts
Pour une réponse incomplète	
Factorisation de 5^n-1	3 pts
Discussion selon la parité de n	3 pts
Pas de solution si n est impair $n>1$	3 points
Pas de solution si n est pair $n>4$	3 points
Chaque solution justifiée (3 points)	9 pts
Raisonnement et Présentation	4 pts

Corrigé

On remarque que $2^1 \mid 4 = 5^1 - 1$ et $2^2 = 4 \mid 24 = 5^2 - 1$ alors $n = 1$ et $n = 2$ sont solutions.

D'autres part on a $5^n - 1 = 4\left(5^{n-1} + 5^{n-2} + ... + 5^1 + 1\right)$

Si n est impair $(n \geq 3)$ le terme $5^{n-1} + 5^{n-2} + ... + 5^1 + 1$ est la somme d'un nombre impair de nombres impairs donc il est impair alors $8 = 2^3$ ne divise pas $5^n - 1$. Alors le seul entier impair solution est 1.

Si n est pair $(n \geq 4)$, il existe alors p tel que $n = 2p$ $(p \geq 2)$ et donc $5^n - 1 = 5^{2p} - 1 = (5^p - 1)(5^p + 1)$

Or $5^p - 1$ et $5^p + 1$ sont deux nombres pairs et leur pgcd est 2 (car $(5^p + 1) - (5^p - 1) = 2$). Alors pour que n soit solution il faut que 2^{2p-1} divise l'un des termes $5^p + 1$ ou $5^p - 1$.

Comme $p \geq 2$ alors 4 divise 2^{2p-1} et donc si 2^{2p-1} divise $5^p + 1$ alors 4 divisera $5^p + 1$ ce qui est absurde car $5^p + 1 \equiv 2[4]$. Donc il faut que 2^{2p-1} divise $5^p - 1$.

On a vu avant que c'est impossible pour p impaire supérieur ou égal à 3.

Si $p = 2$, on a $2^{2p-1} = 8 \mid 24 = 5^2 - 1$ donc $n = 4$ est solution

Si $p = 2k$ avec $k \geq 2$ alors 2^{2p-1} divise $5^p - 1 = (5^k - 1)(5^k + 1)$ signifie que 2^{4k-2} divise toujours $5^k - 1$ ce qui implique que $5^k - 1 \geq 2^{4k-2}$ ce qui est absurde.

Conclusion les seules solutions du problème sont $n = 1,\ n = 2$ et $n = 4$.

Exercice 3 (25 points)

Montrer que l'équation suivante (E) admet deux solutions réelles distinctes

(E) $\quad |x| + |x+1| + |x+2| + ... + |x+2022| = x^2 + 2022x - 2023$.

Barème Exercice 3

Une réponse complète et correcte	25pts
Pour une réponse incomplète	
La factorisation du 2nd membre	5 pts
Signe du 2nd membre	4 pts
Ecriture équation sans valeur absolue	6 pts
Résolution des équations	6 pts
Raisonnement et Présentation	4 pts

Corrigé

(E) s'écrit $|x| + |x+1| + |x+2| + ... + |x+2022| = (x-1)(x+2023)$

Alors il faut que $(x+1)(x-2023) \geq 0$ ce qui signifie $x \leq -2023$ ou $x \geq 1$

1er cas : si $x \leq -2023$ alors l'équation s'écrit $-x - (x+1) - (x+2) - ... - (x+2022) = x^2 + 2022x - 2023$ ou encore

$$-\frac{2023(x + x + 2022)}{2} = x^2 + 2022x - 2023 \Leftrightarrow x^2 + 4045x + 2023 \times 1010 = 0$$

Cette équation admet deux solutions dont l'une est à rejeter car supérieure strictement à -2023.

2e cas si $x \geq 1$ l'équation s'écrit $\dfrac{2023(x + x + 2022)}{2} = x^2 + 2022x - 2023 \Leftrightarrow x^2 - x - 2023 \times 1012 = 0$

Cette équation admet deux solutions dont l'une est à rejeter car inferieure strictement à 1.

Exercice 4 (25 points)

Soit Γ un cercle de centre O et soit A un point à l'extérieur de Γ.

Les tangentes à Γ issues de A rencontrent le cercle en B et C.

Soit D le point d'intersection de la droite (AO) avec Γ tel que $O \in [AD]$.

On considère les points :

- E le point d'intersection de (AD) et (BC).
- X le projeté orthogonal de B sur (CD),
- Y le milieu du segment $[BX]$;
- Z le deuxième point d'intersection de la droite (DY) avec Γ.

1) Faire une figure
2) Démontrer que les points B ,E,Y et Z sont cocycliques.
3) Démontrer que les points A ,E,C et Z sont cocycliques.

Barème Exercice 4

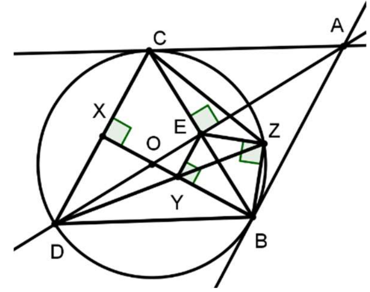
1) Figure	7 points
2) Cocyclicité de B, E, Y, Z	7 points
3) Cocyclicité de A, E, C et Z	7 points
Raisonnement et Présentation	4 points

Corrigé

1) la figure

2) La droite (AD) est la médiatrice de [BC] donc E est le milieu de [BC] d'où (EY) est parallèle à (CD). D'où $\widehat{EYZ} = \widehat{CDZ} = \widehat{CBZ} = \widehat{EBZ}$ alors les points B, E, Y et Z sont cocycliques

3) La droite (AE) est perpendiculaire à (BE) qui est un diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère EYBZ, donc (AE) est tangente à ce cercle.



$\widehat{ZEA} = \widehat{ZYE}$ ((AE) tangente au cercle EYBZ)

D'où $=\widehat{ZBE}$ (cocyclicité des points E, Y, B, Z)

$=\widehat{ZBC}$ (alignement des points B, E, C)

$=\widehat{ZCA}$ ((AC) tangente à Γ en C)

D'où la cocyclicité des quatre points A, E, C et Z. Fin.