Olympiades Nationales de Mathématiques 2020

Sélections régionales 1er tour **Niveau 7C** **26 janvier 2020**

Corrigé

proposé par AMIMATHS

Enoncé de l'Exercice 1

On donne la matrice: $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

A tout réel x on associe la matrice $M(x)=I_3+xA+\frac{1}{2}x^2A^2$

1) Calculer A^2 et A^3 et en déduire, pour tout entier $n>3$, la valeur de A^n.

2) Montrer que $M(x)M(y)=M(x+y)$.

3) Soit n un entier naturel. Ecrire les matrices $M(x)$ et $\left(M(x)\right)^n$ sous forme de tableaux.

Corrigé de l'Exercice 1 :

Barème :	
1) A^2	4
A^3	3
A^n	2
2) $M(x)M(y)=M(x+y)$	4
b) $M(x)$	3
$\left(M(x)\right)^n$	2
Présentation, rédaction et idées	2

1) $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **et**

$A^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=0_3$

Pour tout entier $n>3$, on a $A^n=A^3\times A^{n-3}=0_3\times A^{n-3}=0_3$

.

2) On a $M(x)M(y)=\left(I_3+xA+\frac{1}{2}x^2A^2\right)\left(I_3+yA+\frac{1}{2}y^2A^2\right)$ **donc**

$M(x)M(y)=I_3+yA+\frac{1}{2}y^2A^2+xA+xyA^2+\frac{1}{2}xy^2A^3+\frac{1}{2}x^2A^2+\frac{1}{2}x^2yA^3+\frac{1}{4}x^2y^2A^4$ **or $A^3=A^4=0_3$, d'où**

$M(x)M(y)=I_3+yA+\frac{1}{2}y^2A^2+xA+xyA^2+\frac{1}{2}x^2A^2=I_3+(x+y)A+\left(\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2\right)A^2$

$\Rightarrow M(x)M(y)=I_3+(x+y)A+\frac{1}{2}(x+y)^2A^2=M(x+y)$

3) $M(x)=I_3+xA+\frac{1}{2}x^2A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&x\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{x^2}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x&\frac{x^2}{2}\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\left(M(x)\right)^2=M(x)M(x)=M(2x)=\begin{pmatrix}1&2x&2x^2\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}$. **On a $\left(M(x)\right)^n=M(x)\left(M(x)\right)^{n-1}$, on démontre alors par récurrence que** $\left(M(x)\right)^n=M(nx)=\begin{pmatrix}1&nx&\frac{1}{2}n^2x^2\\0&1&nx\\0&0&1\end{pmatrix}$.

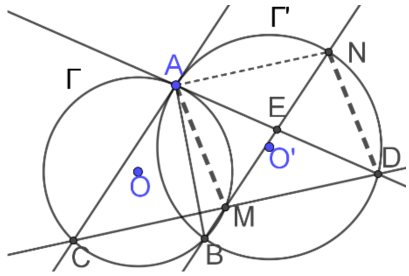
Enoncé de l'Exercice 2

Soit Γ et Γ' deux cercles qui se coupent en A et B. Les tangentes en A à Γ et Γ' recoupent respectivement Γ' et Γ en D et C et la droite (CD) recoupe le cercle Γ en un point M différent de B. On se propose de montrer que la droite (MB) passe par le milieu du segment $[AD]$

1) Soit N le point d'intersection de (BM) avec Γ'. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD})$.

2) Déterminer la nature du quadrilatère AMDN puis conclure.

Corrigé de l'Exercice 2 :



1) En appliquant le théorème de la tangente avec celui de la cocyclicité sur Γ' on trouve $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AN})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BN})\ [\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA})\ [\pi]$, d'où :

$$(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM})=(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CM})=(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM})\ [\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM})\ [\pi] \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD})=0\ [\pi]}.$$

Donc (AN) est parallèle à (CD).

2) En appliquant le théorème de la tangente avec celui de la cocyclicité sur Γ on trouve

$$(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM})\ [\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})\ [\pi],$$

d'où : $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{DN})=(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DN})=(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BN})\ [\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{DN})=0\ [\pi]$ alors les droites (AM) et (DN) sont également parallèles. D'où AMDN est un parallélogramme ce qui montre que les segments $[AD]$ et $[MN]$ ont le même milieu donc la droite (MB) passe par le milieu du segment $[AD]$

Barème :	
1) $(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD})$	7
2) Nature AMDN	7
Conclusion	4
Présentation, rédaction et idées	2

Enoncé de l'Exercice 3

On considère dans $\mathbb{C}$, les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.

1) Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ est un réel positif ou nul.

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b (on suppose que les points O, A et B ne sont pas alignés). Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre du système $\{(A,|b|);(B,|a|)\}$.

3.a) A l'aide de la question 1), montrer que $\dfrac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

b) Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$.

c) En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Corrigé de l'Exercice 3

1) $$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=\frac{(e^{i\alpha}+e^{i\beta})^2}{e^{i\alpha}e^{i\beta}}=\frac{\left(2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)^2}{e^{i(\alpha+\beta)}}=4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

donc c'est un réel positif ou nul.

2) $I=\text{bar}\{(A,|b|);(B,|a|)\} \Leftrightarrow z=\dfrac{a|b|+b|a|}{|a|+|b|}$

Barème :	
1)	5
2)	4
3) a)	4
b)	3
c)	2
Présentation, rédaction et idées	2

3. a) $$z^2=\left(\frac{a|b|+b|a|}{|a|+|b|}\right)^2 \Rightarrow \frac{z^2}{ab}=\frac{\left(\frac{a|b|}{|a||b|}+\frac{b|a|}{|a||b|}\right)^2(|a||b|)^2}{ab(|a|+|b|)^2}=\frac{\left(\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}\right)^2}{ab}\times\frac{(|a||b|)^2}{(|a|+|b|)^2} \Rightarrow \frac{z^2}{ab}=\frac{\left(\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}\right)^2}{\frac{a}{|a|}\times\frac{b}{|b|}}\times\frac{|a||b|}{(|a|+|b|)^2}.$$

Comme $\frac{|a||b|}{(|a|+|b|)^2}$ est un réel positif et $\frac{\left(\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}\right)^2}{\frac{a}{|a|}\times\frac{b}{|b|}}$ est de la forme $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ avec $z_1=\frac{a}{|a|}$ et $z_2=\frac{b}{|b|}$ de module 1 ; alors $\frac{z^2}{ab}$ est un réel positif. En plus $\frac{|a||b|}{(|a|+|b|)^2}\neq 0$ et $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}\neq 0$ car A, B et O ne sont pas alignés implique que $a\neq 0$, $b\neq 0$ et que $\frac{a}{|a|}$ et $\frac{b}{|b|}$ ne sont pas opposés : Si $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0$ alors

$a|b|+b|a|=0\Rightarrow \frac{b}{a}=-\frac{|b|}{|a|}\in\mathbb{R}_-^*\Rightarrow \arg\left(\frac{b}{a}\right)=\pi\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\pi$ ce qui n'est pas le cas d'où $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

b) $\frac{z^2}{ab}\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow \arg\left(\frac{z^2}{ab}\right)=0\Rightarrow \boxed{\arg z=\frac{1}{2}(\arg a+\arg b)}$

c) $\arg z=\frac{1}{2}(\arg a+\arg b)\Rightarrow \arg z-\arg a=\frac{1}{2}(\arg b-\arg a)\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$. D'où $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Enoncé de l'Exercice 4

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1) Le triangle ABC est équilatéral
2) j ou j^2 est racine de l'équation $az^2+bz+c=0$
3) $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$
4) $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0$

Corrigé de l'Exercice 4

Barème :	
1) ⇔ 2)	6
2) ⇔ 3)	6
3) ⇔ 4)	6
Présentation, rédaction et idées	2

On a $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ en plus on a $j^3=1;\bar{j}=j^2=\frac{1}{j}$

- Supposons que le triangle ABC est équilatéral alors
- $\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{c-a}{b-a}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ or $\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow c-a=be^{i\frac{\pi}{3}}-ae^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow$

  $(-1+e^{i\frac{\pi}{3}})a-be^{i\frac{\pi}{3}}+c=0\Rightarrow ja+bj^2+c=0\Rightarrow aj^4+bj^2+c=0$ et

  $\frac{c-a}{b-a}=e^{-i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow c-a=be^{-i\frac{\pi}{3}}-ae^{-i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow(-1+e^{-i\frac{\pi}{3}})a-be^{-i\frac{\pi}{3}}+c=0\Rightarrow aj^2+bj+c=0$. D'où $\boxed{P_1\Rightarrow P_2}$

- Si j est solution de l'équation $az^2+bz+c=0$ alors on a $aj^2+bj+c=0\Rightarrow a(j^2+1)+bj+(c-a)=0$

  $\Rightarrow j(b-a)+(c-a)=0\Rightarrow\frac{c-a}{b-a}=-j=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc ABC est équilatéral. De même si j^2 est solution de $az^2+bz+c=0$ alors $aj^4+bj^2+c=0\Rightarrow a(j^4+1)+bj^2+(c-a)=0$

  $\Rightarrow j^2(b-a)+(c-a)=0\Rightarrow\frac{c-a}{b-a}=-j^2=e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc ABC est équilatéral. D'où $\boxed{P_2\Rightarrow P_1}$

- Si ABC est équilatéral alors d'après Alkashi on a : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow a^2=b^2+c^2-bc$ par analogie on exprime b^2 et c^2, alors on a

  $\begin{cases}a^2=b^2+c^2-bc\\ b^2=c^2+a^2-ac\\ c^2=a^2+b^2-ab\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2)-(bc+ac+ab)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=bc+ac+ab$. D'où

$\boxed{P_1 \Rightarrow P_3}$. Réciproquement si $a^2+b^2+c^2=bc+ac+ab$ alors on a

$a^2+b^2-2ab=-c^2+bc+ac-ab=c(b-c)+a(c-b)=(b-c)(c-a)\Rightarrow(a-b)^2=(b-c)(c-a)$. Donc

$\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=\frac{b-a}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{a-b}=\frac{b-a}{(b-a)^2}+\frac{1}{a-b}=\frac{1}{b\text{-}a}+\frac{1}{a-b}=0$ donc $\boxed{P_3 \Rightarrow P_4}$

- Supposons que $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0$ alors on a

$\begin{cases}\frac{b-a}{(b-c)(c-a)}=-\frac{1}{a-b}\\ \frac{c-b}{(a\text{-}b)(c-a)}=-\frac{1}{b\text{-}c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{b-a}{b-c}=\frac{c-a}{b-a}\\ \frac{c-b}{c-a}=\frac{b-a}{b\text{-}c}\end{cases}\Rightarrow \arg\frac{c-a}{b-a}=\arg\frac{b-a}{b-c}=\arg\frac{c-b}{c-a}$ donc le triangle ABC est équilatéral. D'où $\boxed{P_4 \Rightarrow P_1}$.

__Conclusion__ : On a démontré que $P_1 \Leftrightarrow P_2$ et $P_1 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_1$ donc les 4 propositions sont équivalentes.

__Enoncé de l'Exercice 5__

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\quad\quad$ $\text{ppcm}(x,y)-\text{pgcd}(x,y)=243$.

__Corrigé de l'Exercice 5__

Soit (E) l'équation $\text{ppcm}(x,y)-\text{pgcd}(x,y)=243$ et soit $d=\text{pgcd}(x,y)$. Il existe deux entiers x' et y' premiers entre eux tels que $x=dx'$ et $y=dy'$. Dans ce cas on a $\text{ppcm}(x,y)=dx'y'$, donc l'équation (E) s'écrit $dx'y'-d=243 \Leftrightarrow d(x'y'-1)=243$.

Alors d est un diviseur de 243 or $243=3^5$ et ses diviseurs sont $1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243$ et $x'y'=1+\frac{243}{d}$

Barème :	
$x=dx'$ et $y=dy'$	4
$d(x'y'-1)=243$	3
$x'y'=1+\frac{243}{d}$	2
Valeurs possibles de d	3
Discussion et valeurs de x et y	6
Présentation, rédaction et idées	2

$\boxed{1^{er}\text{ cas } d=1}$ alors $x'y'=244=2^2\times61$ alors :

- ⇨ $x'=1\Rightarrow y'=244\Rightarrow\boxed{x=1\text{ et }y=244}$
- ⇨ $x'=4\Rightarrow y'=61\Rightarrow\boxed{x=4\text{ et }y=61}$
- ⇨ $x'=61\Rightarrow y'=4\Rightarrow\boxed{x=61\text{ et }y=4}$
- ⇨ $x'=244\Rightarrow y'=1\Rightarrow\boxed{x=244\text{ et }y=1}$

$\boxed{2^{ème}\text{ cas } d=3}$ alors $x'y'=82=2\times41$ alors :

- ⇨ $x'=1\Rightarrow y'=82\Rightarrow\boxed{x=3\text{ et }y=246}$
- ⇨ $x'=2\Rightarrow y'=41\Rightarrow\boxed{x=6\text{ et }y=123}$
- ⇨ $x'=41\Rightarrow y'=2\Rightarrow\boxed{x=123\text{ et }y=6}$
- ⇨ $x'=82\Rightarrow y'=1\Rightarrow\boxed{x=246\text{ et }y=3}$

$\boxed{3^{ème}\text{ cas } d=9}$ alors $x'y'=28=2^2\times7$ alors :

- ⇨ $x'=1\Rightarrow y'=28\Rightarrow\boxed{x=9\text{ et }y=252}$
- ⇨ $x'=4\Rightarrow y'=7\Rightarrow\boxed{x=36\text{ et }y=63}$
- ⇨ $x'=7\Rightarrow y'=4\Rightarrow\boxed{x=63\text{ et }y=36}$
- ⇨ $x'=28\Rightarrow y'=1\Rightarrow\boxed{x=252\text{ et }y=9}$

$\boxed{4^{ème}\text{ cas } d=27}$ alors $x'y'=10=2\times5$ alors :

- ⇨ $x'=1\Rightarrow y'=10\Rightarrow\boxed{x=27\text{ et }y=270}$
- ⇨ $x'=2\Rightarrow y'=5\Rightarrow\boxed{x=54\text{ et }y=135}$
- ⇨ $x'=5\Rightarrow y'=2\Rightarrow\boxed{x=135\text{ et }y=54}$
- ⇨ $x'=10\Rightarrow y'=1\Rightarrow\boxed{x=270\text{ et }y=27}$

$\boxed{5^{ème}\text{ cas } d=81}$ alors $x'y'=4$ alors :

- ⇨ $x'=1\Rightarrow y'=4\Rightarrow\boxed{x=81\text{ et }y=324}$
- ⇨ $x'=4\Rightarrow y'=1\Rightarrow\boxed{x=324\text{ et }y=81}$

$\boxed{6^{ème}\text{ cas } d=243}$ alors $x'y'=2$ alors :

- ⇨ $x'=1\Rightarrow y'=2\Rightarrow\boxed{x=243\text{ et }y=486}$
- ⇨ $x'=2\Rightarrow y'=1\Rightarrow\boxed{x=486\text{ et }y=243}$