Phase Finale **Olympiades Nationales de Mathématiques 2018** **Niveau 7C**

Corrigé du sujet

proposé par AMIMATHS

Exercice 1 :

1° Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[$ on a : $\frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2° En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $\prod_{k=2}^{n} \ln k < \frac{\sqrt{n!}}{n}$

Corrigé de l'exercice 1:

1° $\forall x \in]1;+\infty[$ on a $\ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\ln\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\ln t - t + \frac{1}{t}$, avec $t = \sqrt{x}$.

Sot $f(t) = 2\ln t - t + \frac{1}{t}$, $\forall t \in [1;+\infty[$. On a $f'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{-(t-1)^2}{t^2} < 0$

Donc f est strictement décroissante et alors $\forall t \in [1;+\infty[$ on a $f(t) \leq f(1) = 0$

D'où $\forall x \in]1;+\infty[$ $\ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}} < 0$, ce qui montre que $\forall x \in]1;+\infty[$ on a $\ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ et comme $0 < x-1$ on a donc $\frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in]1;+\infty[$.

2° En utilisant la question 1° on a : $\forall k > 1;$ $\frac{\ln k}{k-1} < \frac{1}{\sqrt{k}}$. Le produit de 2 à n donne $\prod_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k-1} < \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Les propriétés du produit et des fractions nous donne (moyennant un changement de variable) :

$$\frac{\prod_{k=2}^{n} \ln k}{\prod_{k=2}^{n} (k-1)} < \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \frac{\prod_{k=2}^{n} \ln k}{\prod_{k=1}^{n-1} k} < \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \prod_{k=2}^{n} \ln k < \left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) . \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Or $\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) . \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) . \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{n}\sqrt{\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\sqrt{n!}}{n}$.

D'où $\prod_{k=2}^{n} \ln k < \frac{\sqrt{n!}}{n}$.

Exercice 2 ;

On considère l'équation : $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ où (x, y) sont des entiers relatifs.

1° Donner une solution particulière de cette équation.

2° Montrer que si $x \neq 0$ alors $x \geq 3$ et $y = 2^{x-1} \times m + n$ (avec m impair et $n = 1$ ou $n = -1$).

3° Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs qui vérifient l'équation : $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.

Corrigé de l'exercice 2:

On peut remarquer que si $(x;y)$ est solution alors $(x;-y)$ est aussi une solution car $(-y)^2 = y^2$.

1° Pour $x = 0$ on a $1 + 2^0 + 2^{2\times0+1} = y^2 \Leftrightarrow 4 = y^2 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -2$.

Donc les couples $(0;2)$ et $(0;-2)$ sont des solutions de l'équation.

2° Soit $A(x) = 1 + 2^x + 2^{2x+1}$. On a $A(1) = 11$ $A(2) = 37$, ces deux nombres ne sont pas des carrés parfait donc $A(1) = y^2$ et $A(2) = y^2$ n'ont pas de solution, d'où $x \geq 3$.

L'équation $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ est équivalente à $2^x(2^{x+1}+1)=y^2-1=(y-1)(y+1)$. En plus $2^x+2^{2x+1}=2^x(2^{x+1}+1)$ est divisible par 2 donc y est impair. Posons alors $y=2n+1$, dans ce cas l'équation va s'écrire $2^x(2^{x+1}+1)=4n(n+1)$. Comme $2^x \wedge (2^{x+1}+1)=1$ et $n\wedge(n+1)=1$ alors 2^x divise $4n$ ou $4(n+1)$.

<u>1^{er} cas</u> : Si 2^x divise $4n$ alors soit p leur quotient on a $p=\frac{4n}{2^x}=\frac{2^{x+1}+1}{n+1}\Rightarrow 2^{x+1}+1=p(n+1)=pn+p$. En multipliant par 4 on trouve $4\left(2^{x+1}+1\right)=p(4n+4)=p\left(p.2^x+4\right)$ c'est-à-dire que $p^2.2^x+4p=8.2^x+4\Rightarrow\left(p^2-8\right).2^x=4(1-p)\Rightarrow 2^x=\frac{4(1-p)}{p^2-8}$. Comme $x\geq 3$ alors $2^x\geq 8$, d'où $\frac{4(1-p)}{p^2-8}\geq 8$.

Cette inégalité montre que $1-p$ et p^2-8 sont de même signe, ce qui ne peut se réaliser que si $\begin{cases}1\leq p\\ p^2<8\end{cases}\Rightarrow p=1$ ou $p=2$. $p=1\Rightarrow 0\geq 8$ et $p=2\Rightarrow 1\geq 8$, les deux cas sont impossibles.

Alors 2^x ne divise pas $4n$.

<u>2^e cas</u> : Si 2^x divise $4(n+1)$. Soit p leur quotient on a
$p=\frac{4(n+1)}{2^x}=\frac{2^{x+1}+1}{n}\Rightarrow 2^{x+1}+1=pn\Rightarrow 8.2^x+4=4np=p\left(p.2^x-4\right)=p^2.2^x-4p$. D'où $2^x=\frac{4(p+1)}{p^2-8}$ et encore $\frac{4(1+p)}{p^2-8}\geq 8\Rightarrow\frac{1+p}{p^2-8}\geq 2$ on a $\begin{cases}p\leq -1\\ p^2<8\end{cases}\Rightarrow p=-1$ ou $p=-2$ dans les deux cas il y a une contradiction, ou $\begin{cases}p>-1\\ p^2>8\end{cases}\Rightarrow p=0$ ou $p=1$ ou $p=2$ ou $p=3$, les trois premiers cas sont rejetés, le seul cas accepté est $p=3$ qui donne $2^x=16\Rightarrow x=4$ et comme $3=p=\frac{4(n+1)}{2^x}=\frac{n+1}{4}\Rightarrow n=11$, d'où $y=23$.

Conclusion :

Les couples d'entiers (x,y) solutions de l'équation $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ sont seulement $(0;2),(0;-2),(4;23)$ et $(4;-23)$

Exercice 3 :

On considère l'intégrale : $\varphi(x)=-\int_0^x \ln(\cos y)\,dy$, pour $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

1° Montrer que : $\varphi(x)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-x\ln 2$.

2° En prolongeant φ par continuité en $\frac{\pi}{2}$ trouer alors la valeur exacte de $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 3

1° Soit $f(x)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-x\ln 2,\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

φ est la primitive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0 de la fonction $x\mapsto$ [illegible]$\text{s}\,x)$. Donc φ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi'(x)=-\ln(\cos x)$. De même f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$f'(x)=\varphi'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\varphi'\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\ln 2=-\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)+\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)+\ln 2\right].$$

D'où $f'(x) = -\ln\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right] = -\ln(\cos x) = \varphi'(x)$. Comme en plus $\varphi(0) = f(0) = 0$, alors on a $\varphi(x) = f(x)$. Ce qui montre que $\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x\ln 2$.

2° Le prolongement par continuité donne que $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\ln 2 = 2\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\ln 2$.

Ce qui montre que $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 4 :

Un octogone convexe $A_1A_2A_3...A_8$ est inscrit dans un cercle de rayon non nul. $A_1A_3A_5A_7$ est un carré d'aire égale à 5 ; $A_2A_4A_6A_8$ est un rectangle d'aire égale à 4. Déterminer, en justifiant, l'aire maximale de l'octogone.

Corrigé de l'exercice 4

Calcul préliminaire :

Le côté d'un carré d'aire 5 mesure $\sqrt{5}$ et sa demi diagonale $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Un rectangle d'aire 4 et de diagonale $2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{10}$ a des côtés de longueurs a et b tels que $ab = 4$ et $a^2 + b^2 = 10$ d'où $(a+b)^2 = 18$ et $(a-b)^2 = 2$, puis $a = 2\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$.

L'angle $\widehat{BOC} = \theta$ est tel que $\sin\theta = \frac{4}{5}$ et $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

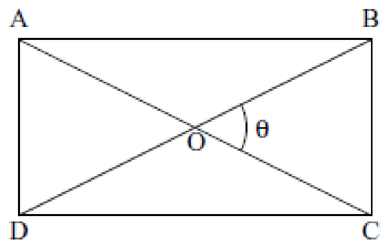

figure 1

1° Méthode Géométrique :

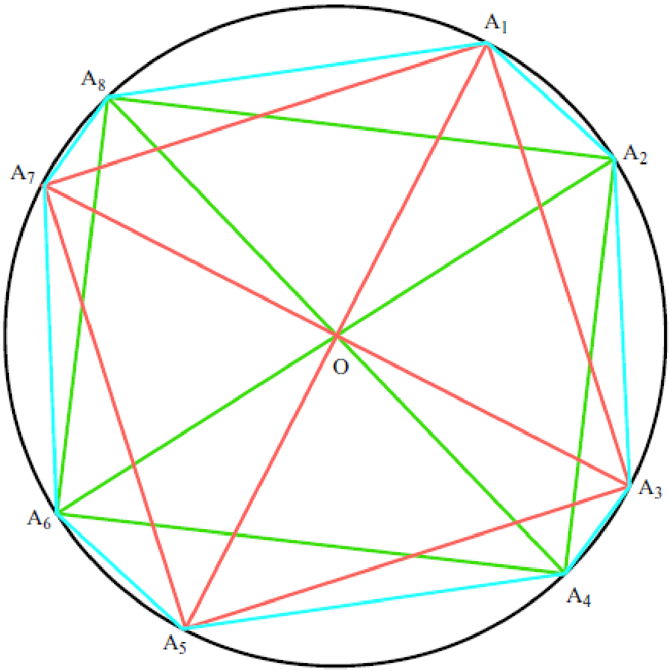

figure 2

L'aire de l'octogone est la somme des aires
- du rectangle $A_2A_4A_6A_8$ égale à 4
- des quatre triangles $A_8A_1A_2$, $A_2A_3A_4$,$A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$

Commençons par démontrer que si un point A décrit un arc de cercle $\widehat{BC}$, l'aire du triangle BAC est maximum quand A_0 est au milieu de l'arc.
En effet, abaissons de A et A_0 les perpendiculaires (AH) et (A_0H_0) à la droite (BC) et traçons la tangente à l'arc en A_0. Pour tout point D de la bande fermée limitée par cette tangente et la droite (BC), on a $DK \leqslant D_0K = A_0H_0$.
En particulier, $AH \leqslant A_0H_0$, l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0.
Mais l'aire du triangle BAC est égale à $\dfrac{BC \times AH}{2}$ et on a $\dfrac{BC \times AH}{2} \leqslant \dfrac{BC \times A_0H_0}{2}$, l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0. (cf. figure 3).

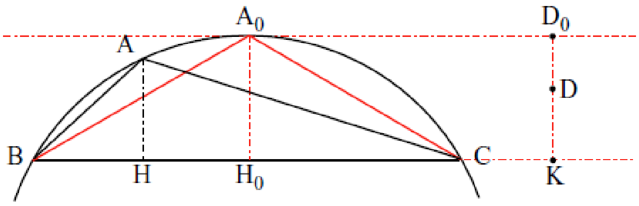

figure 3

Mais (cf. figure 2) A_1A_5 et A_3A_7 sont les diagonales d'un carré et donc perpendiculaires ; si A_3 est au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_4}$, A_1 se trouve au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_8}$, de sorte qu'on maximise en même temps l'aire des deux triangles $A_8A_1A_2$ et $A_2A_3A_4$, donc aussi celles de $A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$ (cf. figure 4, page suivante).

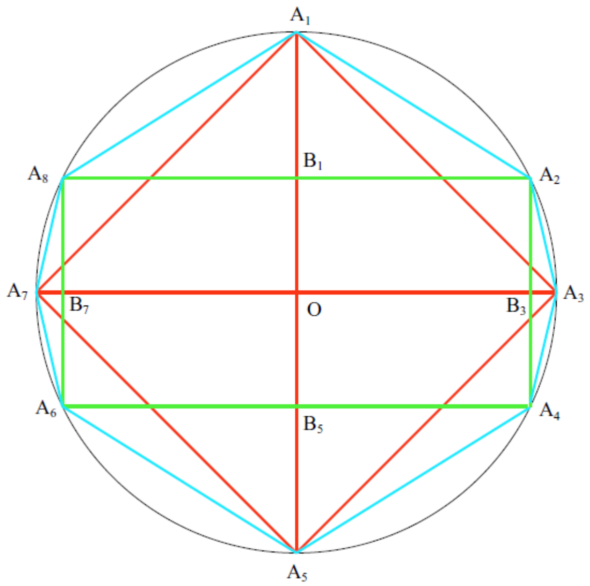

figure 4

L'aire de l'octogone est alors :

$$4 + A_2A_8 \times A_1B_1 + A_2A_4 \times A_3B_3 = 4 + a\left(R - \frac{b}{2}\right) + b\left(R - \frac{a}{2}\right)$$
$$= 4 + R(a+b) - ab = 3\sqrt{5}.$$

2° Méthode Analytique

Posons (cf. figure 5) :

$\widehat{A_3OA_4} = \varphi$, $\widehat{A_2OA_4} = \theta$ donc $\widehat{A_2OA_3} = \theta - \varphi$.

De $\widehat{A_3OA_1} = \widehat{A_3OA_5} = \frac{\pi}{2}$, on déduit

$\widehat{A_1OA_2} = \frac{\pi}{2} - \theta + \varphi$ et $\widehat{A_4OA_5} = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

L'aire de l'octogone est la somme des aires des huit triangles :

A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, A_4OA_5, A_5OA_6, A_6OA_7, A_7OA_8, A_8OA_1 qui sont égales deux à deux en raison de la symétrie de l'octogone par rapport à O. L'aire du triangle A_iOA_{i+1} est égale à $\frac{R^2}{2}\sin \widehat{A_iOA_{i+1}}$. Celle de l'octogone est donc

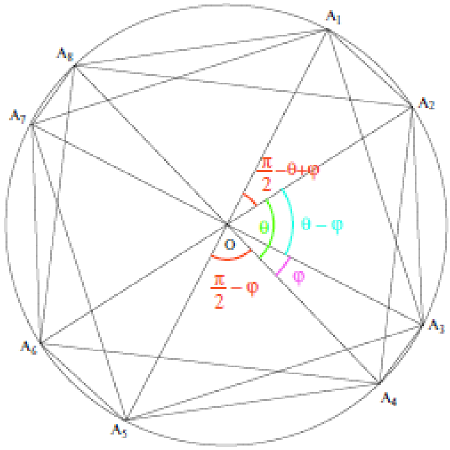

figure 5

$$R^2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \varphi\right) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$$

$$= R^2\left[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \cos\varphi\right]$$

et quand A_3 décrit l'arc $\widehat{A_4A_2}$, φ varie de 0 à θ.

Posons $f(\varphi) = \cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \cos\varphi$

f est dérivable sur $[0,\ \theta]$ de dérivée f' donnée par $f'(\varphi) = \sin(\theta - \varphi) - \cos(\theta - \varphi) + \cos\varphi - \sin\varphi$

f' s'annule pour $\varphi = \frac{\theta}{2}$.

Si $0 \leqslant \varphi < \frac{\theta}{2}$, $\theta - \varphi > \varphi$, $\sin(\theta - \varphi) > \sin\varphi$, $\cos(\theta - \varphi) < \cos\varphi$ donc $f'(\varphi) > 0$.

De même si $\frac{\theta}{2} < \varphi \leqslant \theta$, $f'(\varphi < 0$.

f passe donc par un maximum pour $\varphi = \frac{\theta}{2}$.

L'aire de l'octogone est alors $2R^2\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right) = 2 \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$.

3° Méthode trigonométrique :

Nous partons de l'expression de l'aire de l'octogone obtenue ci-dessus :

$$R^2\left[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\phi + \cos\phi\right]$$

On peut écrire $\sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right]$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\sin\varphi + \sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi\right]$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right).$$

et $\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right)$.

L'aire s'écrit donc

$$R^2\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right)\right] = \frac{5\sqrt{2}}{2}\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos(2\varphi - \theta)\right]$$

La fonction $\varphi \mapsto \cos(2\varphi - \theta)$ a pour courbe représentative un arc de sinusoïde.

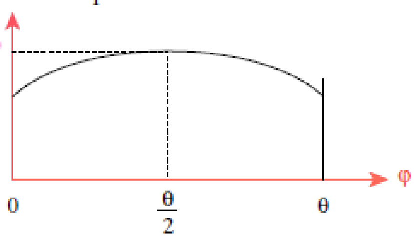

figure 6

Elle atteint son maximum 1 pour $2\varphi - \theta = 0$ ou $\varphi = \frac{\theta}{2}$.

L'aire maximale est donc

$$5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 5(\sin\theta + \cos\theta) = 3\sqrt{5}$$

Exercice 5 :

Trouver l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}$ solutions du système :

$$\begin{cases} x^5-10x^3y^2+5xy^4=8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \\ 5x^4y-10x^2y^3+y^5=8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 5

$$\begin{cases} x^5-10x^3y^2+5xy^4=8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \quad (1) \\ 5x^4y-10x^2y^3+y^5=8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \quad (2) \end{cases}$$

$(1)+i.(2)$ **donne** $(x+iy)^5=32\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=2^5.e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Soit $z=x+iy$ **, on a donc** $z^5=2^5.e^{i\frac{\pi}{12}}$**, dont les solutions sont les complexes** $z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$**,** $0\le k\le 4$

Donc $z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)\right)$.

Les solutions du système sont les couples (x,y) définies par $x=2\cos\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)$ **et** $y=2\sin\left(\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)$ **; avec k un entier compris entre 0 et 4.**

Ces couples sont $\left(2\cos\frac{\pi}{60},2\sin\frac{\pi}{60}\right)$; $\left(2\cos\frac{25\pi}{60},2\sin\frac{25\pi}{60}\right)$; $\left(2\cos\frac{49\pi}{60},2\sin\frac{49\pi}{60}\right)$; $\left(2\cos\frac{73\pi}{60},2\sin\frac{73\pi}{60}\right)$ **et** $\left(2\cos\frac{97\pi}{60},2\sin\frac{97\pi}{60}\right)$.

FIN