

Olympiades Nationales de Mathématiques 2023

3^{ème} tour

Niveau 4AS

19 mars 2023

Durée 4 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
 Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.

Calculatrice non autorisée

Exercice 1 (25 points)

Soit x , y et z des nombres réels non nuls tels que : $\frac{4x^2}{1+4x^2} = y$; $\frac{4y^2}{1+4y^2} = z$ et $\frac{4z^2}{1+4z^2} = x$

Montrer que $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Exercice 2 (25 points)

Soit x et y deux nombres réels distincts tels que

$$x + 1 = (y - 1)^2 \text{ et } y + 1 = (x - 1)^2$$

1) On pose $A = x + y$. Trouver la valeur de A .

2) On pose $B = \left(x + y - \frac{x^2 + y^2}{3} - \frac{3}{x^2 + y^2} \right)^{2023}$. Calculer B .

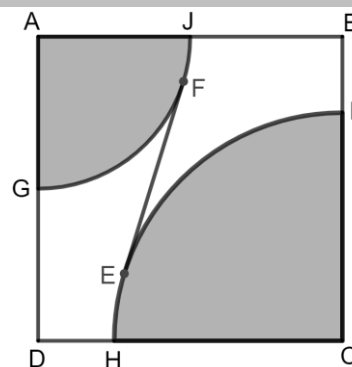
Exercice 3 (25 points)

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré

G est le milieu de $[AD]$.

$[EF]$ est tangent aux quarts des cercles.

Sachant que $AB = 4$ et $CH = 3$, calculer EF .



Exercice 4 (25 points)

Dans le tableau suivant chacune des lettres (a , b , c , d , e , f) désigne un chiffre (parmi $0, 1, 2, \dots, 9$).

Les lettres identiques désignent des chiffres identiques et les lettres différentes désignent des chiffres différents. L'écriture ade désigne le nombre dont le chiffre des unités est e , celui des dizaines est d et celui des centaines est a .

On retrouve des nombres vérifiant les six opérations (verticales et horizontales) dans le tableau :

| | | | | |
|----------|----------|------|-----|--------|
| ab | \times | ac | $=$ | ade |
| \times | | $-$ | | \div |
| c | $+$ | af | $=$ | ac |
| $=$ | | $=$ | | $=$ |
| ce | \div | c | $=$ | ab |

Déterminer les chiffres possibles correspondant à chaque lettre.

Fin.