

Olympiades Nationales de Mathématiques 2023
3^{ème} tour Niveau 7C

19 mars 2023
Durée 4 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 5 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée*

Exercice 1 (20 points)

La police a interrogé quatre personnes témoins d'un vol commis par un homme dans un magasin. Voici leurs déclarations concernant la description du voleur :

L'agent de sécurité : "Il était grand, portait une chemise blanche, un pantalon noir avec un bracelet."

Le gérant : "Il était grand, portait une chemise verte, un pantalon rouge avec un bracelet."

Le caissier : "Il était grand, portait une chemise rouge, un pantalon vert sans bracelet."

Le client : "Il était petit, portait une chemise verte, un pantalon noir avec un bracelet."

Peu de temps après, le voleur est arrêté. Les policiers se rendent compte alors que chaque témoin a donné un renseignement exact, mais un seul.

Peux-tu maintenant trouver les informations exactes ?

Exercice 2 (20 points)

Soient a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $a + b + c + d = 4$.

Montrer que $\frac{bcd}{(4-a)^2} + \frac{acd}{(4-b)^2} + \frac{abd}{(4-c)^2} + \frac{abc}{(4-d)^2} \leq \frac{4}{9}$ et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 3 (20 points)

Soit Γ_1 un cercle tangent intérieurement à un cercle Γ_2 en un point A . Soit P un point de Γ_2 distinct de A . Les points B et C sont les points de contact de Γ_1 avec ses tangentes issues du point P . Les droites (PB) et (PC) recoupent le cercle Γ_2 ; respectivement en deux points Q et R .

1) Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{BAC}$.

2) La droite (BC) coupe le cercle Γ_2 en deux points E et F . Montrer que si le triangle PEF est isocèle en P , alors les points B, C, Q et R sont cocycliques.

Exercice 4 (20 points)

Trouver tous les réels x, y, z et t tels que :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ xy + xz + xt + yz + yt + zt = 54 \end{cases}$$

Exercice 5 (20 points)

Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $2x^2y - 122x^2 - 33y = 2023$.

Fin.