

Olympiades Nationales de Mathématiques 2023

1<sup>er</sup> tour

Niveau 7C

22 janvier 2023  
Durée 3 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.  
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.  
Calculatrice non autorisée*

**Exercice 1 (25 points)**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

1.a) Calculer  $A - J$  et  $J^2$ .

b) Démontrer que pour tout entier  $n \geq 3$ , on a :  $J^n = 0_3$ .

2.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $A^n = (-1)^n \left( I_3 - nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \right)$

b) En déduire la matrice  $A^n$  en fonction de  $n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

**Exercice 2 (25 points)**

Trouver tous les entiers  $n$  strictement positifs pour lesquels  $2^n$  divise  $5^n - 1$

**Exercice 3 (25 points)**

Montrer que l'équation suivante (E) admet deux solutions réelles distinctes :

(E)  $|x| + |x+1| + |x+2| + \dots + |x+2022| = x^2 + 2022x - 2023$  .

**Exercice 4 (25 points)**

Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $O$  et soit  $A$  un point à l'extérieur de  $\Gamma$  .

Les tangentes à  $\Gamma$  issues de  $A$  rencontrent le cercle en  $B$  et  $C$  .

Soit  $D$  le point d'intersection de la droite  $(AO)$  avec  $\Gamma$  tel que  $O \in [AD]$  .

On considère les points :

- $E$  le point d'intersection de  $(AD)$  et  $(BC)$  .
- $X$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(CD)$  ,
- $Y$  le milieu du segment  $[BX]$  ;
- $Z$  le deuxième point d'intersection de la droite  $(DY)$  avec  $\Gamma$  .

1) Faire une figure

2) Démontrer que les points  $B, E, Y$  et  $Z$  sont cocycliques.

3) Démontrer que les points  $A, E, C$  et  $Z$  sont cocycliques.

Fin.