

Olympiades Nationales de Mathématiques 2021

1^{er} tour

Niveau 4AS

28 février 2021

Durée 3 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée*

Exercice 1: (25 points)

Soit a un entier naturel non nul

- 1) Montrer que $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$
- 2) Montrer que $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{(a^2+a)(a^2+a+1)}$
- 3) Déterminer quatre entiers naturels distincts x, y, z et t tels que : $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}$
- 4) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\frac{1}{2021x+2021} + \frac{1}{2021x^2+2021x} = \frac{1}{10105}$.

Exercice 2: (25 points)

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a^2 \neq b^2$; On pose $m = \frac{ab}{a+b}$ et $n = \frac{-ab}{a-b}$

- 1) Montrer que $(a-m)(b-m) = m^2$
- 2) Montrer que $(a-n)(b+n) = -n^2$
- 3) Déterminer deux réels différents x et y tels que : $\left(x - \frac{15}{8}\right)\left(y - \frac{15}{8}\right)\left(x - \frac{15}{2}\right)\left(y + \frac{15}{2}\right) = -\left(\frac{15}{4}\right)^4$

Exercice 3: (25 points)

Soit $a = \frac{\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}}$; $b = \frac{\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ et $F = \frac{a^2+b^2}{a+b}$

- 1) Comparer les nombres a et b .
- 2) Ecrire F sous la forme $x + y\sqrt{z}$ où x, y sont des nombres rationnels et z l'entier naturel le plus petit possible.

Exercice 4: (25 points)

Sur la figure ci-contre :

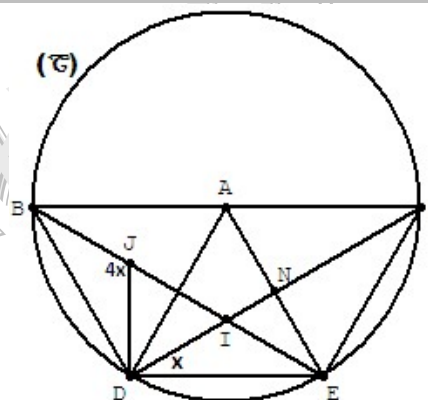
(\mathcal{C}) est un cercle de centre A

Les points B, A et F sont alignés

Le point J est le milieu de $[BI]$.

$(AD) \parallel (EF)$; $\widehat{BJD} = 4x$ et $\widehat{EDF} = x$.

- 1) Montrer que le triangle IDE est isocèle en I
- 2) Exprimer en fonction de x les mesures des angles \widehat{BFD} , \widehat{ADF} , \widehat{EBF} et \widehat{DFE} .
- 3) En déduire la valeur de x .



Fin.