

Olympiades Nationales de Mathématiques 2020

1^{er} tour

Niveau 4AS

26 janvier 2020

Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de quatre exercices indépendants ;
 Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;

Calculatrice non autorisée

Exercice 1: (25 points)

Soit M un point quelconque situé à l'intérieur d'un rectangle ABCD.

- 1) Calculer $AM^2 - BM^2 + CM^2 - DM^2$.
- 2) Sachant que $AM = 119$, $BM = 375$ et $CM = 408$, calculer la distance DM.

Exercice 2: (25 points)

Soit a et b deux réels positifs et $a \neq 1$. On pose :

$$F(a;b) = \frac{ab\sqrt{a} - ab - 25a\sqrt{a} - b\sqrt{a} + 25a + b + 25\sqrt{a} - 25}{a\sqrt{ab} + 5a\sqrt{a} - a\sqrt{b} - 5a - \sqrt{ab} - 5\sqrt{a} + \sqrt{b} + 5}$$

- 1) Calculer $F(a;4)$, $F(4;b)$ et $F(0;b)$.
- 2) Ecrire $F(a;b)$ sans radical au dénominateur.
- 3) Trouver b tel que $F(a;b) = 40$.

Exercice 3 : (25 points)

Dans la figure ci contre, les aires respectives des triangles AMK, KMB, BMI, IMC, CMJ et JMA sont 84 cm^2 , $x \text{ cm}^2$, 40 cm^2 , 30 cm^2 , 35 cm^2 et $y \text{ cm}^2$.

1.a) En utilisant les triangles AIB et AMB, montrer que :

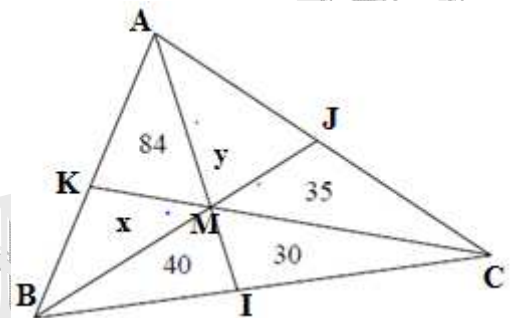
$$\frac{AM}{IM} = \frac{84 + x}{40}$$

b) Montrer que :

$$\frac{35 + y}{30} = \frac{84 + x}{40}$$

c) Montrer que $MB = 2MJ$.

2) Calculer x et y.



Exercice 4 : (25 points)

La roue avant d'une bicyclette du 19^{ème} siècle a 80 cm de diamètre, alors que la roue arrière a 50 cm de diamètre.

Quelle est la distance parcourue par la bicyclette sachant que la roue arrière a fait 78 tours de plus que la roue avant?



Fin.