

Olympiades Nationales de Mathématiques 2018

3^{ème} tour

Niveau 4AS

25 Mars 2018

Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de quatre exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;

Calculatrice non autorisée

Exercice 1 : (25 points)

Soit x, y et z des réels strictement positifs.

1) Montrer que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

2) Dédire que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}$

Exercice 2: (25 points)

Pour tout réel $x > 1$ on pose : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}$

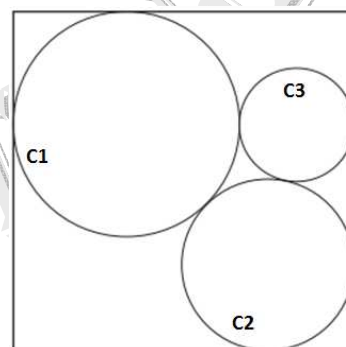
1) a- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (1) : $f(x) = -\frac{1}{2}$.

b- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (2) : $f(x) = -2$.

2) Simplifier $f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(2018)$.

Exercice 3 : (25 points)

On considère les cercles C_1 , C_2 et C_3 de centres respectifs I, J et K, tangents entre eux deux à deux et inscrits dans un carré de côté 1. Chacun des cercles C_1 et C_2 est tangent à deux côtés du carré. C_3 est tangent à un seul côté du carré. La droite (IK) est parallèle à un côté du carré. (Voir la figure ci-contre). Calculer les distances IK, IJ et JK.



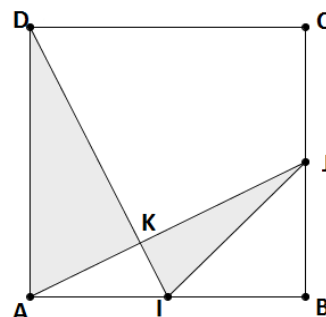
Exercice 4 ; (25 points)

ABCD est un carré de coté 4. I et J sont les milieux des côtés [AB] et [BC]. K est le point d'intersection de (AJ) et (DI)

1) Montrer que $AJ = DI$

2) Montrer que $\widehat{DKJ} = 90^\circ$

3) Calculer l'aire hachurée.



Fin.