

Olympiades Nationales de Mathématiques 2017

Sélections régionales
3^{ème} tour

Niveau 7C

19 mars 2017
Durée 3 h

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée ;
Les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée.

Exercice 1 (4 points)

Soit ABC un triangle acutangle (à angles aigus) tel que $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et H son orthocentre. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par D le symétrique de H par rapport à I .

Montrer que $AD = 2BC$.

Exercice 2 (4 points) :

Un commerçant effectue trois remises successives sur un boubou dont le prix initial était de 30000 Ouguiyas et le vend finalement 22287 Ouguiyas. Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de valeurs entières distinctes ? On donne : $742900 = 17 \times 19 \times 23 \times 2^2 \times 5^2$.

Exercice 3 (4 points)

Etant donné un triangle ABC rectangle en A , on note $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$. On veut construire deux carrés inscrits dans ce triangle : Le premier ayant A pour sommet et le second ayant un côté porté par l'hypoténuse.

- 1) Construire les deux cas de figure en expliquant les étapes de la construction.
- 2) Exprimer les côtés x et y de ces deux carrés en fonction de b et c puis comparer leurs aires.

Exercice 4 (4 points)

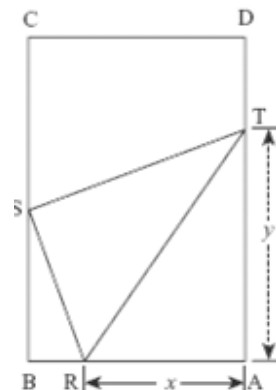
Un nombre palindrome est un nombre entier non nul qui peut se lire de la même manière dans les deux sens (par exemple : 12 321). S'ils sont rangés dans l'ordre croissant, le premier de ces nombres est 1 alors que 55 porte le numéro 14. On dit aussi que 55 est le 14^{ème} nombre palindrome.

- 1) Quel est le 5^{ème} nombre palindrome ?
- 2) Quel est le 20^{ème} nombre palindrome ?
- 3) Donner le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres, puis celui du dernier nombre palindrome à 3 chiffres.
- 4) Un jeune mathématicien, spécialiste des nombres palindromes, protège les résultats de ses recherches dans un coffre-fort dont la combinaison comporte quatre chiffres. Pour se souvenir de la combinaison d'ouverture du coffre, le chercheur, âgé de 22 ans, utilise le seul nombre palindrome dont le quotient par son rang dans la liste des nombres palindromes est l'âge du mathématicien. Quelle peut bien être la combinaison choisie par le savant ?

Exercice 5 (4 points)

Soit $ABCD$ une feuille rectangulaire de largeur $AB=4$ et de longueur $BC=6$. Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir la figure ci-contre : Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille). On pose $AR=x$ et $AT=y$.

- 1) Trouver les valeurs minimale et maximale de x .
- 2) Trouver une relation entre x et y quand S se déplace sur $[BC]$.
- 3) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle SRT est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?



Fin.