HOMOTHÉTIE

Cours de 4AS

1-Activité d'introduction

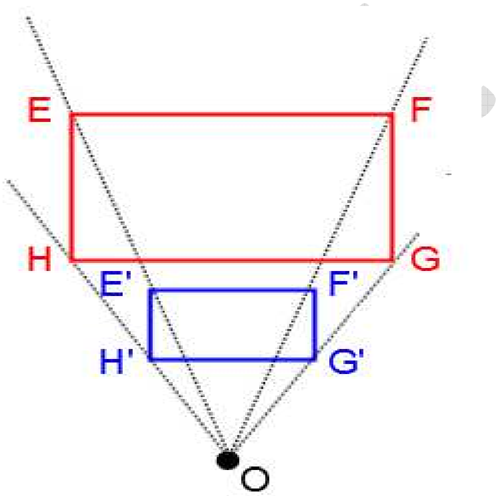
Sur la figure ci contre, E'F'G'H' et EFGH sont deux rectangles de cotés parallèles tels que EF = 12 , FG = 8 ; E'F'=6 et F'G'=4.

1) Sachant que $\frac{OG'}{OG} = \frac{OF'}{OF} = \frac{F'G'}{FG}$, que peut on dire des points O,G et G' ?

2) Que peut on dire des points O,F et F' ?

3) Déterminer un nombre réel k tel que $\overrightarrow{OG'} = k\overrightarrow{OG}$.

4) Le rectangle E'F'G'H' est-il une réduction ou un agrandissement du triangle EFGH ?



2-Définitions

Définition 1

Une homothétie est une transformation du plan qui permet de réduire ou d'agrandir une figure.
Une homothétie est déterminée par deux éléments :
1) **Un point fixe appelé son <u>centre</u>.**
2) **Un nombre réel non nul appelé le <u>rapport</u> de l'homothétie.**

<u>Exemple 1</u>

Dans la figure précédente, le rectangle E'F'G'H' est une réduction de rapport $\frac{1}{2}$ du rectangle EFGH.

On dit que le rectangle E'F'G'H' est l'image du rectangle EFGH par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

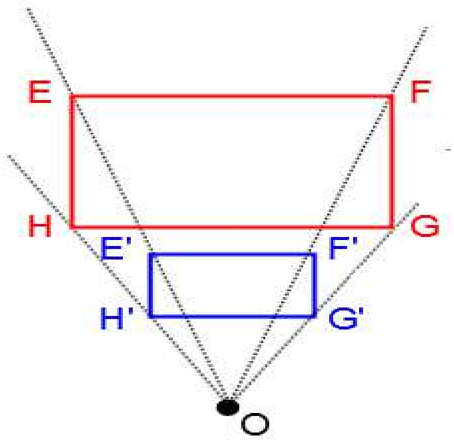
On dit que $h(E) = E'$, $h(F) = F'$, $h(G) = G'$ et $h(H) = H'$.

Pour le centre, particulièrement, on a $h(O) = O$.

Définition 2

Soit Ω un point du plan et soit k un nombre réel non nul. L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation du plan, notée $h_{(\Omega;k)}$ définie par :

$$h_{(\Omega;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$



Exemple 2

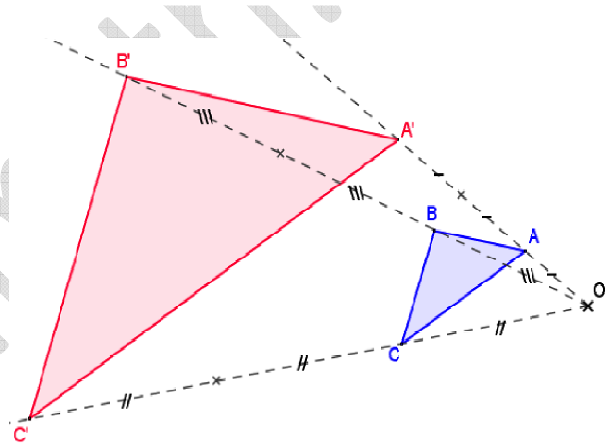
Sur la figure ci-contre, on considère l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

On a $h(F) = F'$ car $\overrightarrow{OF'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$.

De même $h(E) = E'$ car $\overrightarrow{OE'} = ...\overrightarrow{OE}$,

$h(G) = G'$ car ....

$h(H) = H'$ car ....



Exemple 3

Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est un agrandissement du triangle ABC.

On considère l'homothétie $h_{(O,3)}$ de centre O et de rapport 3.

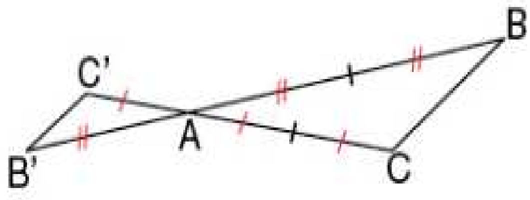
On a :

$h_{(O,3)}(A) = A'$ car $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$.

$h_{(O,3)}(B) = B'$ car ....

$h_{(O,3)}(C) = ...$ car ....

$h_{(O,3)}(O) = O$ car O est le centre de l'homothétie.



Exemple 4

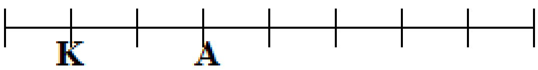
Sur la figure ci-contre, le triangle AB'C' est une réduction du triangle ABC. On considère l'homothétie $h_{(A,\frac{-1}{2})}$ de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$. On a :

$h_{(A,\frac{-1}{2})}(A) = A$ car A est le ....

$h_{(A,\frac{-1}{2})}(B) = B'$ car .... et $h_{(A,\frac{-1}{2})}(C) = ...$ car ....

Exemple 5

On donne la figure ci-contre :



Ecrire la relation vectorielle convenable puis construire :

1) Le point B image de A par l'homothétie h de contre K et de rapport 3.

2) Le point D image de A par l'homothétie h' de contre K et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Solution

Remarques

1) Dans une homothétie de rapport k ; si $|k| > 1$, il y a agrandissement et si $|k| < 1$, il y a réduction.

2) Si deux triangles forment une configuration de Thalès, on dit qu'ils sont homothétiques. c'est-à-dire qu'il ya une homothétie qui transforme l'un en l'autre.

3) L'homothétie de centre O et de rapport -1 c'est aussi la symétrie centrale de centre O.

4) Le mot homothétie est composée de deux parties d'origine grec : *homo* qui veut dire semblable et de *thésis* qui veut dire position.

3- Effets d'une homothétie

1) Soit $h_{(\Omega;k)}$ une homothétie avec $h_{(\Omega,k)}(M) = M'$. Alors : les points Ω ; M et M' sont alignés et $h(\Omega) = \Omega$.

2) L'image d'un segment par une homothétie est un segment qui lui est parallèle.

3) L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

4) L'homothétie conserve l'alignement, les milieux et la mesure des angles.

5) Une homothétie de rapport k multiplie par :

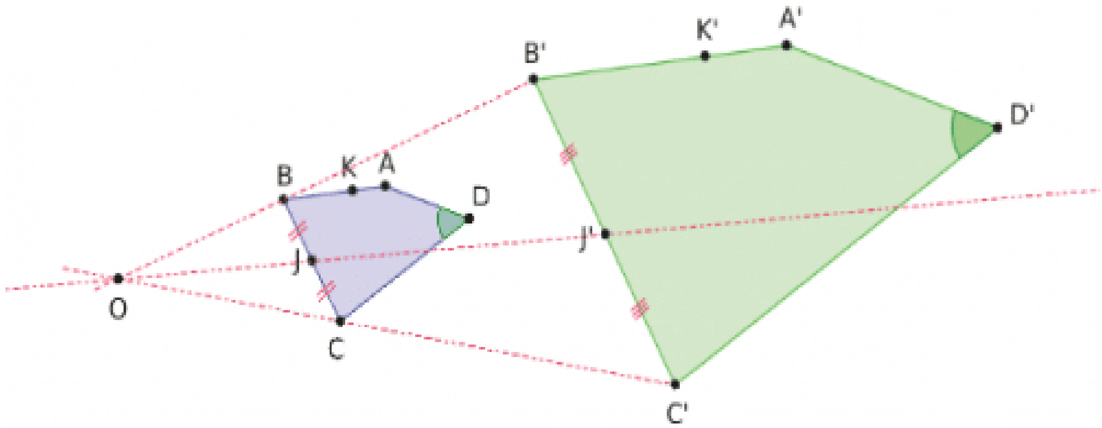
$|k|$ la longueur d'un segment ;

k^2 l'aire d'un figure plane ;

$|k^3|$ le volume d'un solide.

Exemple 6

Le quadrilatère A'B'C'D' est l'image du quadrilatère ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2,5$.



- <u>Conservation de l'alignement</u> : Les points A,B,K sont alignés donc leurs images respectives A',B',K' sont alignées;
- <u>Conservation du milieu :</u> Le point J est le milieu de [BC] donc son image J' est le milieu du segment [B'C'];
- <u>Conservation des mesures d'angles :</u> L'angle $\widehat{A'D'C'}$ est l'image de l'angle $\widehat{ADC}$, ils ont donc la même mesure ;
- <u>Effet sur les longueurs :</u> Les longueurs sont multipliées par la valeur absolue du rapport : 2,5 ainsi $B'C' = 2,5 \times BC$, $D'C' = 2,5 \times DC$...;
- <u>Effet sur les aires :</u> Les aires sont multipliées par le carré du rapport : $(2,5)^2 = 6,25$ ainsi $Aire_{A'B'C'D'} = 6,25 \times Aire_{ABCD}$.

EXERCICES

Exercice 1

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) Si $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$, alors B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport 3

2) Si $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$; alors C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport -2

3) Si $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$; alors C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$

4) Si $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$; alors B est l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport 3

5) Si $h_{(A,4)}(C) = B$ alors $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$

6) Si $h_{(D,4)}(C) = A$, alors $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{CD}$

Solution

Exercice 2

Compléter le tableau en exprimant chaque proposition sous la forme d'une égalité vectorielle:

Proposition	égalité vectorielle
1) A est l'image de B par l'homothétie de centre I et de rapport 5	
2) P est l'image de R par l'homothétie de centre K et de rapport -2	
3) S est l'image de T par l'homothétie de centre R et de rapport $\frac{1}{3}$	
4) M a pour image P par l'homothétie de centre H et de rapport 6 .	
5) K a pour image J par l'homothétie de centre R et de rapport 3 .	
6) S a pour image Q par l'homothétie de centre A et de rapport -1 .	

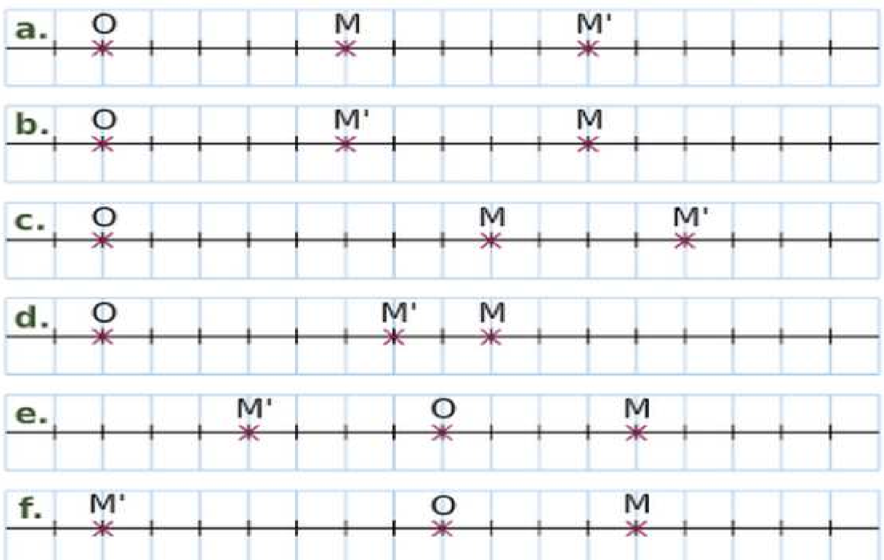
Exercice 3

On considère les figures ci-contre.

Dans chaque cas :

1) Ecrire $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et préciser le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme M en M'.

2) Préciser s'il s'agit d'un agrandissement ou d'une réduction.

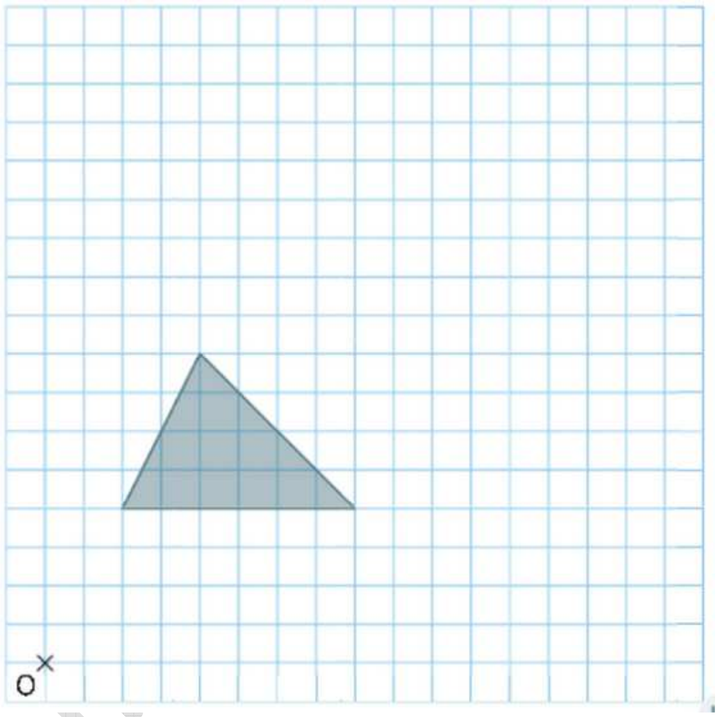


Solution

a)	**b)**
c)	**d)**
e)	**f)**

Exercice 4

Construire l'image du triangle par l'homothétie de centre O et de rapport 2



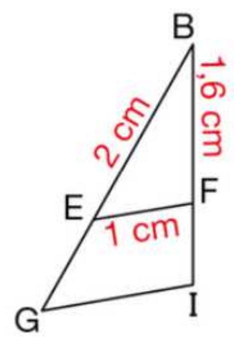
Exercice 5

A et B sont deux points d'une droite (d). Construire les points C, D, E et F tels que :

$h_{(A;2)}(B) = C$; $h_{(A;-1,5)}(B) = D$; $h_{(A;-3)}(B) = E$; $h_{(A;\frac{3}{2})}(B) = F$.

Exercice 6

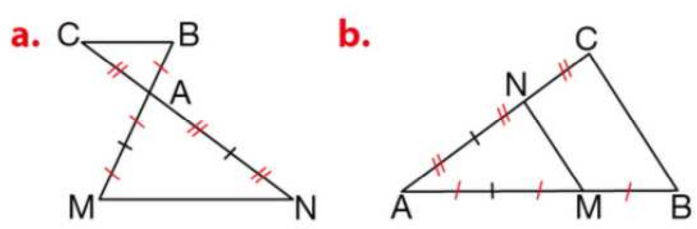
Le triangle BGI est l'image de BEF par l'homothétie de centre B et de rapport 1,5. Calculer les longueurs des cotés du triangle BGI.



Solution

Exercice 7

Dans chaque cas, le triangle AMN est l'image de ABC par une homothétie de centre A.
Donner le rapport.



Solution

Exercice 8

Construire un rectangle ABCD et son image par l'homothétie $h_{(A;\frac{1}{2})}$

Solution :

Exercice 9

On donne : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{IN}=-5\overrightarrow{IM}$ et $3\overrightarrow{AM'}-4\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

Compléter :

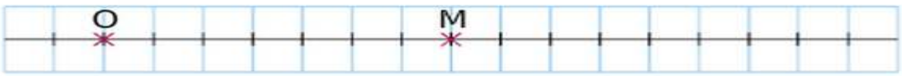
- **a- C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport ….. car …**
- **b- B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport … En effet …**
- **c- N est l'image de M par l'homothétie de centre ……… et de rapport (-5)**
- **d- M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport ……….**

Exercice 10

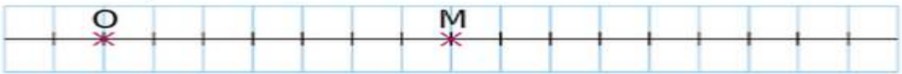
On considère les figures suivantes

Dans chaque cas ; construire M' image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k, (écrire $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$).

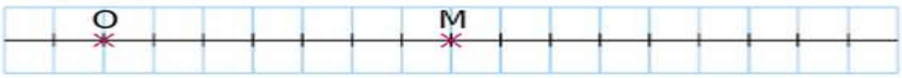
a. $k=\frac{5}{7}$



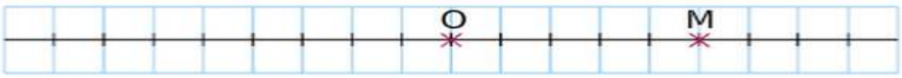
b. $k=\frac{10}{7}$



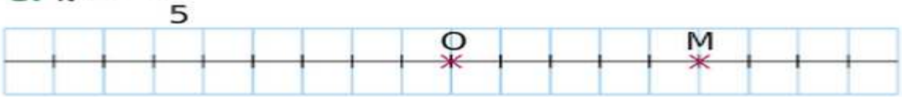
c. $k=2$



d. $k=-1$



e. $k=-\frac{3}{5}$



f. $k=-\frac{7}{5}$