PROBABILITÉS

Cours de 4AS

I-Activité d'introduction

On lance un dé numéroté de 1 à 6 et on note le nombre inscrit sur la face du dessus (face supérieure du dé).
On suppose que le dé est parfaitement équilibré, c'est-à-dire que chaque face a autant de chance de sortir.

Question 1	**Peut-on prévoir de façon certaine le nombre obtenu sur la face supérieure ?**
Réponse	**Non. Il y a plusieurs possibilités. Le résultat est déterminé par le hasard. Il ne peut donc pas être prévu à l'avance avec certitude.**
Commentaire	**Un phénomène dont on ne peut pas prévoir de façon certaine le résultat, ou l'issue, est appelé une expérience aléatoire.**

Question 2	**Combien y-a-t-il de possibilités ?**
Réponse	**Il y a 6 faces, donc 6 possibilités.**
Commentaire	**En probabilité, chaque résultat possible est appelé issue. Il y a ainsi 6 issues possibles.**

Question 3	**Combien de chance a-t-on d'obtenir 4 ?**
Réponse	**Nous avons 1 chance sur 6 d'obtenir 4**
Commentaire	**Obtenir 4 est une issue (un résultat possible)** **Nous dirons que la probabilité d'obtenir 4 est $\frac{1}{6}$, et nous noterons : $p(4)=\frac{1}{6}$**

Question 4	Quelles sont les possibilités d'obtenir un nombre pair?
Réponse	Il y a trois possibilités (issues) : 2, 4 et 6.
Commentaire	Obtenir un nombre pair est un <u>événement</u> ''A'' composé de trois issues. Nous dirons que la <u>probabilité</u> de l'événement A : « obtenir un nombre pair» est $\frac{3}{6}$, et nous noterons : $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=50\%$

Question 5	Quelles sont les issues réalisant l'événement A : « le nombre obtenu est pair » ?
Réponse	Il y a 3 issues réalisant cet événement : « le nombre obtenu est 2 », « le nombre obtenu est 4 » et « le nombre obtenu est 6 ».
Commentaire	L'événement A est un <u>ensemble d'issues</u>. Il est <u>réalisé</u>, lorsque l'une des issues qui le composent est réalisée.

Question 6	Soit B l'événement : « obtenir un multiple de 3 ». Quelles sont les issues <u>favorables</u> à l'événement B?
Réponse	L'événement B a deux issues favorables : « le nombre obtenu est 3 » et « le nombre obtenu est 6 ».
Commentaire	Nous avons 2 chances sur 6 de réaliser B. La probabilité de B est égale au <u>nombre de cas favorables</u> sur le <u>nombre de cas possibles dans l'expérience aléatoire</u>. On a donc : $p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Question 7	Quel est le numéro de la face du dé qui a la plus grande chance de sortir ?
Réponse	Les six faces du dé ont la même chance de sortir.
Commentaire	Si toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les événements sont équiprobables, ou qu'il y a équiprobabilité. La probabilité d'un événement A est calculée par le rapport $p(A)=\dfrac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre total d'issues}}$

Question 8	A compléter par le professeur en classe...
Réponse	
Commentaire	

II-Définitions et vocabulaire

Définitions	Exemples et remarques
Une expérience est <u>aléatoire</u> lorsque l'on ne peut pas déterminer avec certitude le résultat de l'expérience. C'est une expérience liée au <u>hasard</u> pouvant conduire à plusieurs résultats.	On lance un dé équilibré numéroté de 1 à 6 et on note le nombre inscrit sur sa face supérieure. Le lancer d'un dé est une expérience aléatoire car on ne sait pas avec certitude le numéro que l'on obtiendra. Le lancer d'une pièce de monnaie (on regarde la face supérieure). Si on lançait un dé tel que toutes les faces portent le numéro 1, ce ne serait pas une expérience aléatoire; car le résultat serait connu: il est certain que le numéro 1 sortirait
<u>L'univers</u> d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes ses éventualités. En général, on le note Ω.	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Un <u>événement</u> est un ensemble formé d'une ou plusieurs issues relatives à une même expérience aléatoire. Toute partie de l'univers est un événement.	'Obtenir nombre impair ' est un événement A que l'on peut réaliser en lançant un dé numéroté de 1 à 6 : $A = \{1,3,5\}$ Obtenir 4 est un événement : $B = \{4\}$
Les événements <u>élémentaires</u> sont les événements réduits à une <u>unique</u> issue de l'expérience aléatoire.	Obtenir 4 est un événement élémentaire. $B = \{4\}$
L'événement <u>contraire</u> de l'événement A, que l'on note $\overline{A}$ est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.	Soit A l'événement 'Obtenir nombre impair ' $A = \{1,3,5\}$. L'événement contraire de A c'est l'événement 'Obtenir nombre pair ' $\overline{A} = \{2,4,6\}$ Si $B = \{4\}$ alors $\overline{B} = \{1,2,3,5,6\}$.
Un événement est <u>certain</u> lorsque l'on est sûr qu'il va se produire. L'événement certain contient toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire. C'est un événement qui se réalise <u>toujours</u>.	Obtenir un nombre inférieur à 10. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Un événement est <u>impossible</u> lorsque l'on est sûr qu'il ne peut pas se réaliser. **L'événement impossible est un événement qui ne contient aucune issue de l'expérience aléatoire. C'est un événement qui ne se réalise <u>jamais</u>.**	**Obtenir un nombre négatif** **Obtenir un nombre supérieur à 8.** $F=\{\ \}$, $F=\Phi$. **L'événement impossible est représenté par l'ensemble vide.**
Deux événements sont <u>incompatibles</u> lorsqu'ils ne peuvent pas se produire en même temps **Ils n'ont aucune issue en commun.**	**G :' Obtenir un 3' et** **H : ' Obtenir un nombre pair' sont deux événements incompatibles** $G=\{3\}$, $H=\{2,4,6\} \Rightarrow G\cap H=\Phi$

Notion de probabilité

Dans une expérience aléatoire, à chaque issue correspond <u>un nombre réel compris entre 0 et 1</u> qui représente sa chance d'être réalisée. Ce nombre est appelé la <u>probabilité</u> de cette issue.

Lien avec les fréquences

Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la <u>fréquence</u> de réalisation d'un évènement devient proche de sa probabilité avec le temps.
Ce phénomène est connu sous le nom de "<u>loi des grands nombres</u>".

<u>Exemple 1</u>

Dans un collège de 500 élèves, on a interrogé les élèves sur le nombre d'enfants dans leur famille. Les réponses sont représentées dans le tableau suivant :

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6 et plus
Effectif	71	150	125	91	41	22

1) Compléter le tableau par les fréquences

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6 et plus
Effectif	71	150	125	91	41	22
Fréquence (en %)				18.2%		4.4%

2) On choisit un élève au hasard dans le collège.
La probabilité de l'événement A : L'élève appartient à une famille de quatre enfants est approchée par la fréquence correspondante, soit $p(A)=\frac{18,2}{100}$ **ou** $p(A)=0,182$.
Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

B : L'élève appartient à une famille de trois enfants.

$p(B) = \frac{.....}{100} = ...$

C : L'élève appartient à une famille de deux enfants.

$p(C) = \frac{.....}{......} = ...$

D : L'élève appartient à une famille d'un enfant.

$p(D) = ...$

E : L'élève appartient à une famille de trois enfants au plus.

$p(E) = ...$

F : L'élève appartient à une famille de cinq enfants au moins

$p(F) = ...$

Propriétés

1) Quel que soit l'événement A, on a : $0 \leq p(A) \leq 1$.
2) La probabilité d'un événement certain est égale à 1.
3) La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.
4) La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
5) La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Exemple 2

Parmi les 500 élèves inscrits au collège :

350 aiment le thé.

250 aiment le café

150 aiment les deux.

1) Quel est le nombre des élèves qui n'aiment ni le thé, ni le café?

2) Quel est le pourcentage des élèves qui aiment le thé, mais pas le café?

3) Quel est le pourcentage des élèves qui aiment le café, mais pas le thé?

4) On interroge un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il :

E : Aime le thé mais pas le café ?

F : Aime le café mais pas le thé ?

G : Aime un seul des deux ?

H : N'aime ni le thé, ni le café ?

Solution

<u>1ère Méthode : Utilisons un diagramme de Venn.</u>

Analysons la situation :

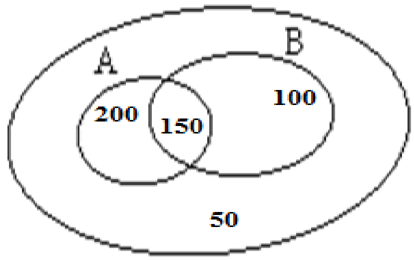
Désignons par A l'ensemble des élèves qui aiment le thé et B l'ensemble des élèves qui aiment le café.

Le premier nombre placé est 150 qui représente l'intersection $A \cap B$. On en déduit ensuite

200 = 350 – 150 et 100 = 250 – 150.

La somme de ces trois nombres :

(150 + 200 + 100 = 450) constitue l'ensemble des élèves qui aiment le thé ou le café : $A \cup B$.



1) On en déduit enfin que le nombre des élèves qui n'aiment ni le thé, ni le café est 500 – 450 = 50.

2) Le pourcentage des élèves qui aiment le thé, mais pas le café est ......

...

...

3) Le pourcentage des élèves qui aiment le café, mais pas le thé est ......

...

...

4) Calcul des probabilités :

On rappelle que la probabilité d'un événement A est calculée par le rapport

$$p(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

$$p(E)=\frac{.....}{.....}=$$

$$p(F)=\frac{.....}{.....}=$$

$$p(G)=\frac{.....}{.....}=$$

$$p(H)=\frac{.....}{.....}=$$

<u>2ème Méthode : Utilisons un diagramme de Carroll</u>

Complétons le tableau suivant :

	A(aime le thé)	$\overline{A}$ (n'aime pas le thé)	Total
B(aime le café)	150		250
$\overline{B}$ (n'aime pas le café)			
Total	350		500

On en déduit que :

1) Le nombre d'élèves qui aiment le thé mais pas le café est.......

2) Le pourcentage des élèves qui aiment le thé, mais pas le café est.......

3) Le pourcentage des élèves qui aiment le café, mais pas le thé est........

(l'intersection de $\overline{A}$ et $\overline{B}$).

4) Calcul des probabilités :

$$p(E) = \frac{.....}{.....} =$$

$$p(F) = \frac{.....}{.....} =$$

$$p(G) = \frac{.....}{.....} =$$

$$p(H) = \frac{.....}{.....} =$$

<u>Exemple 3</u>

On lance successivement deux dés équilibrés à 6 faces numérotés de 1 à 6.

1) Combien y a-t-il d'issues (résultats possibles) ?

2) Combien y a-t-il de cas où la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures est supérieure ou égale à 10 ?

3) Calculer la probabilité que la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures soit :

A : Supérieure ou égale à 10

B : Strictement inférieure à 10

C : Egale à 9

D : Comprise entre 5 et 8.

E : Supérieure ou égale à 14

F : Inférieure ou égale à 5

G: Supérieure ou égale à 2

<u>Solution :</u>

<u>On utilise un tableau à double entrée</u> qui permet de traiter deux grandeurs de manière simultanée : une indiquée en ligne et l'autre en colonne.

Ce tableau permet de compter les cases vérifiant une certaine propriété.

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

1) Alors il y a $6\times6=36$ résultats possibles.
2) Il ya 6 cas où la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures est supérieure ou égale à 10 : (4,6) ;(5,5) ;(5,6) ;(6,4) ; (6,5) et (6,6).
3) Pour le calcul des probabilités, on représente la somme dans le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On rappelle que la probabilité d'un événement A est calculée par le rapport

$$p(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

$$p(A)=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=$$

$$p(B)=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=$$

$$p(C)=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=$$

$$p(D)=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=$$

$$p(E)=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=$$

$$p(F)=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=$$

$$p(G)=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=$$

Exemple 4

Un sachet contient 3 bonbons à la menthe, 6 à l'orange et 1 au citron. On tire, au hasard, un bonbon du sachet et on définit les événements suivants :

A : « le bonbon est à la menthe » ;

B : « le bonbon est à l'orange » ;

C : « le bonbon est au citron ».

1. Détermine les probabilités p(A) puis p(B) et p(C).

2. Représente l'expérience par un arbre pondéré (on fait figurer sur chaque branche la probabilité associée).

Solution

1. Calcul de probabilités

Comme le bonbon est tiré au hasard, alors chaque bonbon a la même chance d'être tiré. Il y a équiprobabilité.

Le nombre d'issues possibles est de 10 (3 + 6 + 1 = 10).

L'événement A est constitué de trois issues favorables, on a donc :

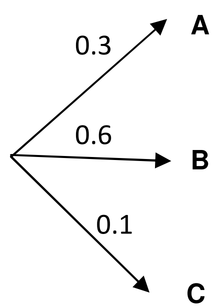
$$p(A) = \frac{3}{10} = 0.3$$

L'événement B est constitué de six issues favorables, on a donc : $p(B) = \frac{6}{10} = 0.6$

L'événement C est constitué d'une seule issue favorable, on a donc :

$$p(C) = \frac{1}{10} = 0.1$$

2. Arbre des possibles



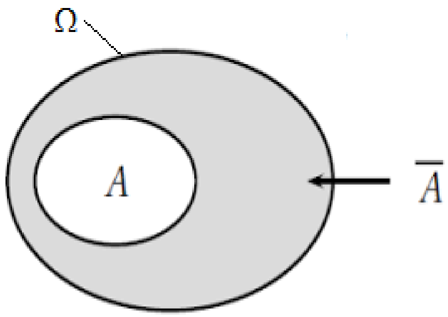
On vérifie que 0.3 + 0.6 + 0.1 = 1.

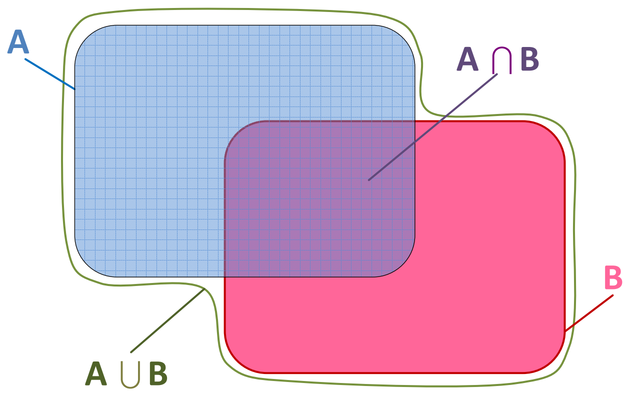
III-Réunion et intersection de deux événements

Définitions et propriétés:

Soit A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire.

Définitions	Remarques
L'événement "A et B", noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.	Si $C = A \cap B$, alors D est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps.
L'événement "A ou B", noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.	Si $D = A \cup B$, alors C est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B.
A et B sont disjoints ou incompatibles si $A \cap B = \Phi$	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps .
A et B sont contraires ou complémentaires. $B = \overline{A}$ $A \cap B = \Phi$ et $A \cup B = \Omega$ (L'univers)	B est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A.





Propriétés

Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

1) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

2) $A \cap B = \phi \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ A et B sont incompatibles.

3) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, (L'événement contraire de A).

Exemple 5

Soient A et B deux événements tels que : $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.45$ et $P(A \cap B) = 0.15$

Calculer $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(\overline{A \cup B})$ et $P(\overline{A \cap B})$.

Solution : On applique les formules :

1) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B) = 0.25 + 0.45 - 0.15$

$p(A \cup B) = 0.55$

2) $p\left(\overline{A}\right)=1-p\left(A\right)$

$p\left(\overline{A}\right)=1-0.25$

$p\left(\overline{A}\right)=0.75$

3) $P\left(\overline{B}\right)=...$

4) $P\left(\overline{A\cup B}\right)=...$

5) $P\left(\overline{A\cap B}\right)=...$

Exemple 6

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

Soit E l'évènement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».

1) Quelle est la probabilité de l'évènement E?

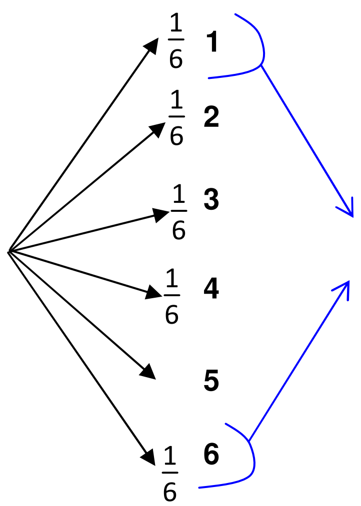
2) Déterminer l'évènement contraire de E et calculer sa probabilité.

Solution

1) Calcul de p(E)

1ère Méthode : On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire :

Chaque issue à la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1, un 2, … ou un 6. On dit qu'il y a équiprobabilité.



$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

On applique la propriété suivante :

La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Ainsi p(E) = $\frac{1}{3}$: La probabilité de l'évènement E est de $\frac{1}{3}$.

<u>2ème Méthode</u> : Comme il y a équiprobabilité ; on applique la formule

La probabilité d'un événement E : $p(E)=\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

L'événement E est représenté par l'ensemble $E=\{1,6\}$ qui contient deux éléments.

L'ensemble de toutes les issues possibles est $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ qui contient six éléments.

$p(E)=\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

2) L'évènement contraire de E est :

« La face du dessus est un 2, un 3, un 4 ou un 5 ». $\overline{E}=\{2,3,4,5\}$

<u>1ère Méthode : On utilise la formule</u> $p(\overline{E})=1-p(E)$

Donc $p(\overline{E})=1-p(E)\Rightarrow p(\overline{E})=1-\dfrac{1}{3}\Rightarrow p(\overline{E})=\dfrac{2}{3}$

<u>2ème Méthode : Comme il y a équiprobabilité ; on applique la formule</u>

La probabilité d'un événement $\overline{E}$: $p(\overline{E})=\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

$\overline{E}=\{2,3,4,5\}\Rightarrow p(\overline{E})=\dfrac{4}{6}\Rightarrow p(\overline{E})=\dfrac{2}{3}$

<u>Exemple 7</u>

On tire une boule au hasard dans une urne contenant 8 boules dont 2 bleues, une rouge, 3 jaunes et 2 vertes. On note la couleur de la boule tirée. Les boules sont indiscernables au toucher.

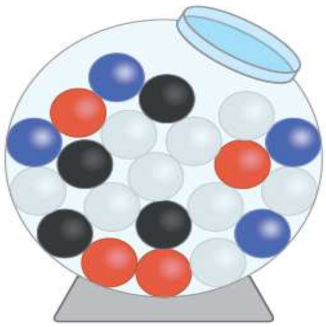
1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

B : La boule tirée est bleue.

R : La boule tirée est rouge

J : La boule tirée est jaune

V : La boule tirée est verte



2) Représenter sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.

3) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C : La boule tirée est bleue ou verte.

D : La boule tirée n'est pas jaune.

Solution

1) Les boules sont indiscernables au toucher. Donc il y a équiprobabilité.

Pour calculer la probabilité on utilise le rapport $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

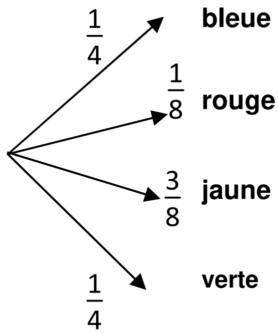
$$p(B)=\frac{\text{nombre de boules bleues}}{\text{nombre total de boules}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$p(R)=\frac{\text{nombre de boules rouges}}{\text{nombre total de boules}}=\frac{1}{8}$$

$$p(J)=\frac{\text{nombre de boules jaunes}}{\text{nombre total de boules}}=\frac{3}{8}$$

$$p(V)=\frac{\text{nombre de boules vertes}}{\text{nombre total de boules}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

2) On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.



3) On a :

- $p(C)=p(B\cup V)=p(B)+p(V)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ **car les événements B et V sont incompatibles.**
- $p(D)=p(\overline{J})=1-p(J)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ **car D est l'événement contraire de J.**