

## تمارين و مشكلات:

### التمرين 1

ضع علامة  $\checkmark$  أمام كل جملة صحيحة و العلامة  $\times$  أمام كل جملة خاطئة:

- 1 - إذا كانت  $F$  دالة أصلية لدالة  $f$  على مجال  $I$  فإن  $f$  هي الدالة المشتقة للدالة  $F$ .
- 2 - الدالة:  $x \mapsto x^3 - 5x$  هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة:  $x \mapsto 3x^2 - 5$  على  $\mathbb{R}$ .
- 3 - كل دالة مستمرة على مجال يمكن تعيين دالتها الأصلية.
- 4 - إذا كانت  $F$  دالة أصلية لدالة  $f$  فإن  $F^2$  دالة أصلية للدالة  $f^2$ .
- 5 - الدالة  $F'$  هي دالة أصلية للدالة  $F''$ .
- 6 - كل دالة مستمرة على مجال  $I$  تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم عند عدد  $x_0$  من  $I$ .
- 7 - الدالة  $x \mapsto \sin 2x$  هي الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto \cos 2x$  على  $\mathbb{R}$ .
- 8 - الدالة  $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x}$  على  $\mathbb{R}$ .
- 9 - الدالة الأصلية لدالة كثير حدود هي دالة كثير حدود.
- 10 - الدالة:  $f^{(n)}$  هي إحدى الدوال الأصلية للدالة  $f$ .
- 11 - الدالة:  $x \mapsto \cos x + \sin x$  هي الدالة الأصلية للدالة:  $x \mapsto \sin x - \cos x$ .

12 - إذا كانتا  $F$  و  $G$  دالتان أصليتان لنفس الدالة  $f$  على مجال  $I$  فإنه من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ :  $h(x) - g(x) = k$  و  $k \in \mathbb{R}$ .

13 - الدالة  $x \mapsto \frac{1}{x}$  لا تقبل دوالاً أصلية على المجال  $]0; +\infty[$ .

14 - توجد دالة كثيرة حدود إحدى دوالها الأصلية هي نفسها.

15 - الدالة  $x \mapsto x^3$  هي الدالة الأصلية التي تنعدم عند  $0$ .

للدالة  $x \mapsto 3x^2$

16 - إذا كانت  $f$  دالة مستمرة على مجال  $I$  فهي تقبل دالة أصلية وحيدة على هذا المجال.

17 - كل دالة معرفة على مجال  $I$  تقبل دالة أصلية على  $I$ .

18 - كل دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $[a; b]$  تقبل دوالاً أصلية على  $[a; b]$ .

19 - الدوال الأصلية للدالة  $x \mapsto (x^2 + 1)^2$  هي الدوال

$$k \in \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + k$$

20 - الدوال الأصلية للدالة  $x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$  هي الدوال :

$$x \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + k$$

## التمرين 2

عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  في كل مما يلي معينا مجال الدراسة :

$$1) f(x) = 2x - 1$$

$$2) f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$3) f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 4$$

$$4) f(x) = x^4 - x^3$$

$$5) f(x) = \frac{4}{x^2}$$

$$6) f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$7) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$8) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$9) f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$10) f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}$$

## التمرين 3

عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  في كل مما يلي معينا مجال الدراسة :

$$1) f(x) = x^2(x^3 + 1)^2$$

$$2) f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 1)^3$$

$$3) f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$4) f(x) = \frac{x-1}{(x^2 - 2x + 4)^3}$$

$$5) f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$6) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$7) f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$8) f(x) = \cos 2x - \sin 3x$$

$$9) f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$$

$$10) f(x) = \cos 2x \cdot \sin 2x$$

## التمرين 4

عين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $I$  التي تحقق  $F(0) = 0$  في كل حالة مما يلي :

$$1) f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$I = ]-1; +\infty[$$

$$3) f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$$

$$I = ]-\infty; -2[$$

$$4) f(x) = x^n - 1 ; n \in \mathbb{N}$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$6) f(x) = x + 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$I = ]-1; +\infty[$$

$$7) f(x) = \sin x \cdot \cos^n x$$

$$I = \mathbb{R} , n \in \mathbb{N}$$

$$8) f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3}$$

$$I = ]-\infty; -2[$$

## التمرين 5

نعتبر الدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \sin^3 x$

(1) عين الدوال الأصلية  $F$  للدالة  $f$  .

(2) استنتج الدالة الأصلية  $H$  للدالة  $f$  و التي تأخذ القيمة 2 من

أجل  $x = 0$

## التمرين 6

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x-1)^2}$$

- (1) عين  $D_f$  مجموعة التعريف للدالة  $f$  .
- (2) بين أنه من أجل كل عدد  $x$  من  $D_f$  فإن:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

- (3) عين الدوال الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $]1; +\infty[$  .
- (4) استنتج الدالة الأصلية  $H$  التي تنعدم عند  $x=2$  للدالة  $f$  على  $]1; +\infty[$  .

## التمرين 7

- (1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  حيث:  $g(x) = \sqrt{3-2x}$
- (2) نعتبر الدالة  $f$  حيث:  
 $f(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \sqrt{3-2x}$   
عين الأعداد الحقيقية  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  بحيث تكون  $f$  دالة أصلية للدالة  $g$  على المجال  $]-\infty; \frac{3}{2}[$  .
- (3) أنشئ التمثيل البياني للدالة  $g$  .

## التمرين 8

نعتبر الدالة  $f(x) = \sin x + \sin^3 x$ :

(1) احسب  $f'(x)$  و  $f''(x)$ .

(2) بين أنه يوجد عدنان حقيقيان  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث من أجل كل عدد

حقيقي  $x$  فإن:  $f''(x) + \alpha f(x) = \beta \sin x$

(3) استنتج الدوال الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

(4) استنتج الدالة الأصلية  $H$  للدالة  $f$  بحيث:  $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

## التمرين 9.

$f$  دالة فردية و مستمرة على  $\mathbb{R}$ .  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

$G$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $G(x) = F(x) - F(-x)$

بين أن  $G$  دالة ثابتة على  $\mathbb{R}$ .

## التمرين 10.

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}_+$  بالعلاقة:  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ .

(C) تمثيلها البياني.

1 - ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}_+$

2 - بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا.

3 - لتكن  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على  $]0; +\infty[$  و التي تنعدم

عند 0. بين أن  $F$  موجودة.

4 - استنتج اتجاه تغير الدالة  $F$ .

5 - نعرف على  $\mathbb{R}_+$  الدالتان  $H$  و  $K$  كما يلي:

$$H(x) = F(x) - x \text{ و } K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$$

- ادرس اتجاه تغير الدالتان  $H$  و  $K$  على  $\mathbb{R}_+$ .
- استنتج أنه من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x \geq 0$
- فإن :  $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$ .
- استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .
- 6- استنتج أن المعادلة  $F(x) = \pi$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}_+$ .
- بين أن :  $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$

### التمرين 11

$$y' = x^2 + \frac{1}{(x+1)^2} \dots (1)$$

- عين حلا للمعادلة التفاضلية (1).
- استنتج الحل الذي يعدم من أجل  $x=0$ .
- نضع :  $y = f(x)$ . عين الدالة  $f$ .
- ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
- ادرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة للمنحنى (C).
- الممثل لتغيرات الدالة  $f$ .
- أنشئ (C) بعد حساب :  $f(-2), f(0), f(2), f(1)$ .

## التمرين 12.

عين الحل الذي يأخذ القيمة 1 من أجل  $x=2$  للمعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}, \text{ حيث } x \in \mathbb{R}.$$

- بوضع:  $y = f(x)$ . ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ .

- ادرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C)$  الممثل لتغيرات  $f$ .

- احسب كل من:  $f(-5), f(-4), f(-2), f(3), f(2), f(0)$ .  
أعطي القيم مدورة إلى  $10^{-2}$  ثم أنشئ  $(C)$ .



التمرين 1

<input type="checkbox"/>	(4	<input type="checkbox"/>	(3	<input type="checkbox"/>	(2	<input type="checkbox"/>	(1
<input type="checkbox"/>	(8	<input type="checkbox"/>	(7	<input type="checkbox"/>	(6	<input type="checkbox"/>	(5
<input type="checkbox"/>	(12	<input type="checkbox"/>	(11	<input type="checkbox"/>	(10	<input type="checkbox"/>	(9
<input type="checkbox"/>	(16	<input type="checkbox"/>	(15	<input type="checkbox"/>	(14	<input type="checkbox"/>	(13
<input type="checkbox"/>	(20	<input type="checkbox"/>	(19	<input type="checkbox"/>	(18	<input type="checkbox"/>	(17

التمرين 2

تعيين الدوال الأصلية :

(1 لدينا :  $f(x) = 2x - 1$  و منه :  $D_f = \mathbb{R}$

$$F(x) = x^2 - x + k, k \in \mathbb{R}$$

(2 لدينا :  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  و منه :  $D_f = \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + k, k \in \mathbb{R}$$

(3 لدينا :  $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 4$  و منه :  $D_f = \mathbb{R}$

$$F(x) = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 4x + k; k \in \mathbb{R}$$

(4 لدينا :  $f(x) = x^4 - x^3$  و منه :  $D_f = \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + k; k \in \mathbb{R}$$

(5 لدينا :  $f(x) = \frac{4}{x^2}$  و منه :  $D_f = \mathbb{R}^*$

الدالة  $f$  مستمرة على كل من المجالين  $]-\infty; 0[$  و  $]0; +\infty[$  و عليه تقبل دوال أصلية  $F$  على كل منهما معرفة بالعباراة:

$$F(x) = \frac{-4}{x} + k; k \in \mathbb{R}$$

(6) لدينا :  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$  و منه :  $D_f = \mathbb{R}^*$

الدالة  $f$  هي مجموع دالتين ناطقتين فهي مستمرة على مجموعة التعريف و عليه فهي دوال أصلية على كل من المجالين :  $]-\infty; 0[$  أو  $]0; +\infty[$  معرفة بالعباراة :

$$F(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2} + k, k \in \mathbb{R}$$

(7) لدينا :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  و منه :  $D_f = \mathbb{R}_+^*$

الدالة  $f$  هي مقلوب دالة صماء مستمرة و عليه فهي مستمرة على  $D_f$  و منه تقبل دوال أصلية  $F$  حيث :

$$F(x) = 2\sqrt{x} + k ; k \in \mathbb{R}$$

(8)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  و منه :  $D_f = ]1; +\infty[$

الدالة  $f$  مستمرة لأنها مقلوب مركب دالتين مستمرتين و عليه تقبل

دوال أصلية  $F$  حيث :  $F(x) = 2\sqrt{x-1} + k ; k \in \mathbb{R}$

(9)  $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$  و منه :  $D_f = \mathbb{R}$

الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  و عليه تقبل دوال أصلية  $F$

و لدينا :  $f(x) = \cos 2x$

و منه :  $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + k ; k \in \mathbb{R}$

(10) لدينا :  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}$

ومنه :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$

إذن :  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{R}$

أي :  $D_f = \left] \frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\frac{\pi}{2} \right[ , k \in \mathbb{R}$

و عليه  $f$  مستمرة على  $D_f$  لأنها حاصل قسمة مركب دوال مثلية و كثيرات حدود تقبل دوال أصلية  $F$

و لدينا :  $f(x) = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^3 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} = -2 \cdot \frac{-\sin x}{[\cos x]^2}$

و منه :  $F(x) = -2 \times \frac{-1}{\cos x} + k$

إذن :  $F(x) = \frac{2}{\cos x} + k$  حيث  $k$  ثابت حقيقي.

### التمرين 3

تعيين الدوال الأصلية للدالة  $f$  في كل مما يلي :

(1) لدينا :  $f(x) = x^2(x^3 + 1)^2$  و  $D_f = \mathbb{R}$

و منه :  $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2(x^3 + 1)^2$

إذن :  $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}(x^3 + 1)^3 + k ; k \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{9}(x^3 + 1)^3 + k \quad : \text{أي}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad 2) f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 1)^3 \quad : \text{لدينا (2)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x+2)(x^2 + 2x - 1)^3 \quad : \text{و منه}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} (x^2 + 2x - 1)^4 + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \quad : \text{إذن}$$

$$F(x) = \frac{1}{8} (x^2 + 2x - 1)^4 + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \quad : \text{أي}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \quad : \text{لدينا (3)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \quad : \text{و منه}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2 + 1} + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \quad : \text{إذن}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{x-1}{(x^2 - 2x + 4)^3} \quad : \text{لدينا (4)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{(x^2 - 2x + 4)^2} \quad : \text{و منه}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2 - 2x + 4} + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \quad : \text{إذن}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} \quad : \text{لدينا (5)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}} \quad : \text{و منه}$$

إذن :  $F(x) = \frac{1}{4} \times \sqrt{x^4 + 1} + k ; k \in \mathbb{R}$

(6) لدينا :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$  ؛  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

و منه :  $f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}$

إذن :  $F(x) = \sqrt{x^2 - 1} + k ; k \in \mathbb{R}$

(7) لدينا :  $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  ؛  $D_f = \mathbb{R}$

إذن :  $g(x) = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \lambda ; \lambda \in \mathbb{R}$

(8) لدينا :  $f(x) = \cos 2x - \sin 3x$  ؛  $D_f = \mathbb{R}$

إذن :  $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + k ; k \in \mathbb{R}$

(9) لدينا :  $f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$  ؛  $D_f = \mathbb{R}$

إذن :  $F(x) = \frac{1}{4} \cos^4 x + k ; k \in \mathbb{R}$

(10) لدينا :  $f(x) = \cos 2x \cdot \sin 2x$  ؛  $D_f = \mathbb{R}$

و منه :  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$

و عليه :  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$

إذن :  $F(x) = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{4} \cos 4x + k$

$$F(x) = \frac{-1}{8} \cos 4x + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \quad : \text{أي}$$

#### التمرين 4

تعيين الدوال الأصلية :

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \quad : \text{لدينا (1)}$$

$$g(x) = \frac{-1}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \lambda \quad : \text{إذن}$$

$$g(x) = -2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} + \lambda \quad : \text{أي}$$

$$\lambda = 2 \quad : \text{لكن} \quad g(0) = 0 \quad \text{ومنه} \quad -2 + 0 + \lambda = 0 \quad \text{أي} \quad \lambda = 2$$

$$\cdot \quad g(x) = -2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} + 2 \quad : \text{إذن}$$

$$I = ]-1; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad : \text{لدينا (2)}$$

$$f(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad : \text{ومنه}$$

$$g(x) = 2\sqrt{x+1} + \lambda \quad : \text{إذن}$$

$$\lambda = -2 \quad : \text{لكن} \quad g(0) = 0 \quad \text{ومنه} \quad 2 + \lambda = 0 \quad \text{أي} \quad \lambda = -2$$

$$\cdot \quad g(x) = 2\sqrt{x+1} - 2 \quad : \text{إذن}$$

$$I = ]-\infty; -2[ \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{(x+2)^3} \quad : \text{لدينا (3)}$$

$$g(x) = \frac{-1}{2(x+2)^2} + \lambda \quad : \text{إذن}$$

لكن :  $g(0) = 0$  و منه :  $-\frac{1}{8} + \lambda = 0$  أي :  $\lambda = \frac{1}{8}$

إذن :  $g(x) = \frac{-1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{8}$

(4) لدينا :  $I = \mathbb{R}$  ؛  $f(x) = x^n - 1$  ؛  $n \in \mathbb{N}$

إذن :  $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - x + \lambda$

لكن :  $g(0) = 0$  و منه :  $0 - 0 + \lambda = 0$  أي :  $\lambda = 0$

إذن :  $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - x$

(5) لدينا :  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  ؛  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

إذن :  $g(x) = \tan x + \lambda$

لكن :  $g(0) = 0$  و منه :  $\tan 0 + \lambda = 0$  أي :  $\lambda = 0$

إذن :  $g(x) = \tan x$

(6) لدينا :  $I = ]-1; +\infty[$  ؛ 6)  $f(x) = x + 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$

إذن :  $g(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x+1} + \lambda$

لكن :  $g(0) = 0$  و منه :  $1 + \lambda = 0$  أي :  $\lambda = -1$

إذن :  $g(x) = \frac{x^2}{2} + x \frac{1}{x+1} - 1$

(7) لدينا :  $I = \mathbb{R}$  ؛  $f(x) = \sin x \cdot \cos^n x$

و منه :  $f(x) = -1 \times (-\sin x) (\cos x)^n$

$$g(x) = \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} x + k \quad : \text{ إذن}$$

$$k = \frac{-1}{n+1} \quad : \text{ أي} \quad \frac{-1}{n+1} + k = 0 \quad \text{و منه} \quad g(0) = 0 \quad \text{لكن}$$

$$g(x) = \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} x + \frac{1}{n+1} \quad : \text{ إذن}$$

$$I = ]-\infty ; -2[ \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3} \quad : \text{ (8) لدينا}$$

$$g(x) = \frac{-1}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + k \quad : \text{ إذن}$$

$$k = \frac{5}{8} \quad : \text{ أي} \quad \frac{-1}{2} - \frac{1}{8} + k = 0 \quad \text{و منه} \quad g(0) = 0 \quad \text{لكن}$$

$$g(x) = \frac{-1}{n+2} - \frac{1}{2(n+2)^2} + \frac{5}{8} \quad : \text{ إذن}$$

### التمرين 5

1 - تعيين الدوال الأصلية للدالة  $f$  :

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x (1 - \cos^2 x) \quad : \text{ لدينا}$$

$$f(x) = \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x \quad : \text{ وعليه}$$

$$g(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + k \quad : \text{ إذن}$$

$$h(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + k \quad : \text{ حيث } h \text{ استنتاج}$$

$$k = \frac{2}{3} \quad : \text{ أي} \quad -1 + \frac{1}{3} + k = 0 \quad \text{و منه} \quad h(0) = 2 \quad \text{مع}$$

$$h(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{3} \quad : \text{ إذن}$$



1 - مجموعة التعريف :  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2 - تعيين  $a, b, c$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3+(-2a+b)x^2+(a+2b)x+b+c}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=+2 \\ c=-2 \end{cases} \text{ : أي } \begin{cases} a=1 \\ -2a+b=0 \\ a-2b=-3 \\ b+c=0 \end{cases} \text{ : و منه :}$$

$$f(x) = x+2 - \frac{2}{(x-1)^2} \text{ : و عليه :}$$

3 - تعيين الدوال الأصلية  $g$  :

$$f(x) = x+2 - \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{x-1} + \lambda \text{ : و منه :}$$

4- استنتاج الدالة الأصلية  $h$  حيث :  $h(2) = 0$

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{x-1} + \lambda \text{ : لدينا :}$$

و منه :  $h(2) = 2 + 4 + 2 + \lambda$  أي  $h(2) = \lambda + 8$

إذن :  $\lambda + 8 = 0$  و منه :  $\lambda = -8$

إذن :  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{x-1} - 8$

التمرين 7

1- دراسة تغيرات  $g$  :  $D_f = \left] -\infty ; \frac{3}{2} \right]$

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} g(x) = 0$  ؛  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-2x} = +\infty$

$$g'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$$

و منه :  $g'(x) < 0$  و عليه  $g$  متناقصة تماما على المجال  $\left] -\infty ; \frac{3}{2} \right]$

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$0$

2- تعيين :  $\alpha, \beta, \gamma$

$f$  دالة أصلية للدالة  $g$  تكافئ :  $f'(x) = g(x)$  و لدينا :

$$f'(x) = (2\alpha x + \beta)\sqrt{3-2x} + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \times \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}$$

$$= (2\alpha x + \beta)\sqrt{3-2x} - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \frac{\sqrt{3-2x}}{3-2x}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(2\alpha x + \beta)(3-2x)\sqrt{3-2x} - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\sqrt{3-2x}}{3-2x} \\
 &= \frac{\sqrt{3-2x}}{3-2x} (6\alpha x - 4\alpha x^2 + 3\beta - 2\beta x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma) \\
 &= \frac{\sqrt{3-2x}}{3-2x} \times [-5\alpha x^2 + (6\alpha - 3\beta)x + 3\beta - \gamma]
 \end{aligned}$$

تكون  $f'$  دالة أصلية للدالة  $g$  إذا و فقط إذا كان :

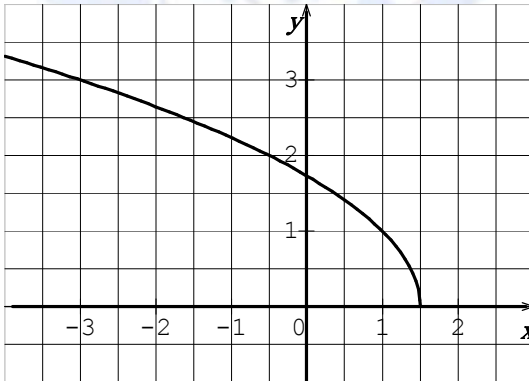
$$\frac{-5\alpha x^2 + (6\alpha - 3\beta)x + 3\beta - \gamma}{3-2x} = 1$$

و عليه :  $-5\alpha x^2 + (6\alpha - 3\beta)x + 3\beta - \gamma = 3 - 2x$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{2}{3} \\ \gamma = -1 \end{cases} \quad \text{و عليه :} \quad \begin{cases} -5\alpha = 0 \\ 6\alpha - 3\beta = -2 \\ 3\beta - \gamma = 3 \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}x - 1\right)\sqrt{3-2x} \quad \text{و منه :}$$

3- إنشاء بيان  $g$  :



(1) حساب  $f'(x)$  و  $f''(x)$  :

لدينا :  $f'(x) = \cos x + 3 \cos x \sin^2 x$

و منه :  $f'(x) = \cos x (3 + \sin^2 x)$

$f''(x) = -\sin x (3 + \sin^2 x) + \cos x (2 \cos x \sin x)$

$f''(x) = \sin x [-3 - \sin^2 x + 2 \cos^2 x]$

(2) نبين وجود  $\alpha$  و  $\beta$  :  $f''(x) + \alpha f'(x) = \beta \sin x$

$-3 \sin x - \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x + \alpha \sin x + \alpha \sin^3 x = \beta \sin x$

$(\alpha - 3) \sin x - \sin^3 x + 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \alpha \sin^3 x = \beta \sin x$

$(\alpha - 3) \sin x - \sin^3 x + 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \alpha \sin^3 x - \beta \sin x = 0$

$(\alpha - \beta - 1) \sin x + (\alpha - 3) 2 \sin^3 x = 0$

و منه :  $\begin{cases} \alpha - 3 = 0 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases}$  أي :  $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$

إذن :  $f''(x) + 3 f'(x) = 2 \sin x$

(3) إيجاد الدوال الأصلية  $F$  للدالة  $f$  :

مما سبق :  $f(x) = \frac{1}{3} (-f''(x) + 2 \sin x)$

و عليه :  $F(x) = \frac{1}{3} (-f'(x) - 2 \cos x) + k$  ,  $k \in \mathbb{R}$

إذن :  $F(x) = \frac{1}{3} (\cos x (3 + \sin^2 x) - 2 \cos x) + k$

أي :  $F(x) = \frac{1}{3} (\cos x + \cos x \sin^2 x) + k$

4) تعيين الدالة الأصلية  $H$  حيث :  $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

لدينا :  $H(x) = \frac{1}{3}(\cos x + \cos x \sin^2 x) + k$

ومنه :  $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2}\right) + k$

لكن :  $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  ومنه :  $k = 1$

وعليه :  $h(x) = \frac{1}{3} \cos x (1 + \sin^2 x) + 1$

### التمرين 9

نبين أن دالة ثابتة على  $\mathbb{R}$  :

لدينا :  $G(x) = F(x) - F(-x)$

و لدينا :  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  و منه :  $F'(x) = f(x)$

و بما أن  $f$  فردية فإن :  $f(-x) = -f(x)$

لدينا :  $G'(x) = F'(x) - (-1)F'(-x)$

$$G'(x) = F'(x) + F'(-x)$$

$$G'(x) = f(x) + f(-x)$$

$$G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

و عليه :  $G(x) = \lambda$  حيث :  $\lambda$  عدد ثابت.

1- دراسة تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}_+$  :

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$  ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2x^3 - 2x - x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

و منه  $f$  متزايدة تماما على  $[1; +\infty[$  و متناقصة تماما على  $[0; 1]$   
جدول التغيرات :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	1	$\frac{2}{3}$	1

2- نبين أن  $(C)$  يقبل مستقيم مقارب :

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  فإن  $y = 1$  معادلة مستقيم مقارب.

3- نبين أن  $F$  موجودة وبما أنها دالة ناطقة فهي مستمرة على مجموعة تعريفها وعليه فهي مستمرة على  $\mathbb{R}_+$  ومنه  $f$  تقبل دالة أصلية  $F$  وهذه الدالة وحيدة لأنها تأخذ القيمة 0 عند 0.

4- استنتاج تغير الدالة  $F$ :

لدينا :  $F'(x) = f(x)$  حيث :  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$

لكن :  $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1$  وعليه :  $F'(x) > 0$

ومنه  $F$  متزايدة تماما على  $[0; +\infty[$ .

5- دراسة اتجاه تغير  $H$ :

لدينا:  $f(x) \geq \frac{2}{3}$  لكن  $H'(x) = F'(x) - \frac{2}{3} = f(x) - \frac{2}{3}$

ومنه:  $H'(x) \geq 0$  وعليه  $H$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}_+$ .

- دراسة اتجاه تغير  $k$ :

$f(x) \leq 1$  ؛  $K'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1$

$K'(x) \leq 0$  و عليه  $K$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}_+$

- استنتاج أن:  $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$

لدينا:  $f(x) \geq \frac{2}{3}$  ولدينا:  $f(x) \leq 1$

ومنه:  $F(x) \leq x$  إذن:  $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$

- استنتاج النهاية:

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و عليه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

جميع الحقوق محفوظة © <http://www.onefd.edu.dz>

6- استنتاج أن المعادلة  $F(x) = \pi$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}_+$  :  
 الدالة  $F$  مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}_+$  و بما أن  $\pi \in \mathbb{R}_+$   
 فإن يوجد عدد وحيد  $\alpha$  بحيث  $f(\alpha) = \pi$   
 حسب نظرية القيم المتوسطة

$$\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi \text{ - نبين أن}$$

$$\text{لدينا : } \frac{2}{3}\pi \leq F(\pi) \leq \pi \text{ حيث : } \frac{2}{3}\pi \leq F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{ومنه : } \pi \leq F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \leq \frac{3\pi}{2} \text{ إذن : } F(\pi) \leq \pi \leq F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

وعليه  $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$  حسب نظرية التزايد المتناهية.

### التمرين 11

- حل المعادلة التفاضلية هو :

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + \lambda ; \lambda \in \mathbb{R}$$

- تعيين الحل  $f$  حيث  $f(0) = 0$  :

$$\text{لدينا : } f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + \lambda \text{ وبما أن : } f(0) = 0$$

$$\text{فإن : } 0 = -1 + \lambda \text{ ومنه : } \lambda = 1$$

$$\text{وعليه : } f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 1$$

- دراسة التغيرات للدالة  $f$  :

$$D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 1 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x > -1 \\ x \rightarrow -1}} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x < -1 \\ x \rightarrow -1}} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = x^2 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد  $x$  من  $D_f$  لدينا:  $f'(x) > 0$

إن  $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين:  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; -1[$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

- دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

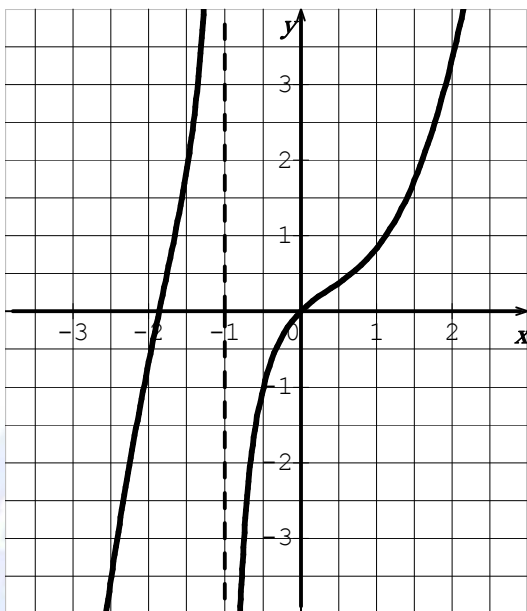
لدينا أربعة فروع لانهائية و مستقيم مقارب معادلته :  $x = -1$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x} = +\infty$$

و عليه  $(C)$  يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الترتيب عند  $+\infty$  و آخر عند  $-\infty$  .

$$- \text{إنشاء } (C) : f(1) = \frac{5}{6} \quad ; \quad f(2) = \frac{10}{3} \quad ; \quad f(-2) = \frac{-2}{3}$$

$$. \quad f(0) = 0$$



## التمرين 12

- تعيين  $f$  :

لدينا :  $y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$  و منه :  $y' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}}$

وهي من الشكل :  $y' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

وعليه :  $y = \sqrt{g(x)} + c = \sqrt{x^2+2x+8} + c$  ؛  $c \in \mathbb{R}$

إن :  $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8} + c$  ؛  $c \in \mathbb{R}$

لكن :  $f(2) = 1$  و عليه :  $\sqrt{(2)^2+2(2)+8} + c = 1$

إن :  $4 + c = 1$  أي :  $c = -3$

و عليه :  $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8} - 3$

- دراسة تغيرات  $f$  :

$$D_f = ]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 8}}$$

إشارة المشتق :

$x$	$-\infty$	$1^-$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

إذن الدالة متزايدة تماما على المجال  $[-1; +\infty[$

و متناقصة تماما على  $]-\infty; -1]$ .

- جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-1)$	$+\infty$

$$f(-1) \approx -0,35 \quad ; \quad f(-1) = \sqrt{7} - 3$$

- دراسة الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة يوجد فرعان لانهايتان :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}}{x} = \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 3 - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[ \sqrt{x^2 + 2x + 8} - (x+3) \right] \left[ \sqrt{x^2 + 2x + 8} + (x+3) \right]}{\left[ \sqrt{x^2 + 2x + 8} + x + 3 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2x + 8) - (x+3)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} + x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 8 - x^2 - 6x - 9}{x \left[ \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1 + \frac{3}{x} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[ -4 - \frac{1}{x} \right]}{x \left[ \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1 + \frac{3}{x} \right]} = -2$$

و عليه :  $y = x - 2$  هي معادلة مستقيم مقارب مائل عند  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \right)}}{x} - \frac{2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \right)}}{x} - \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 3 + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[ \sqrt{x^2 + 2x + 8} - (x + 3) \right] \left[ \sqrt{x^2 + 2x + 8} + (-x + 3) \right]}{\left[ \sqrt{x^2 + 2x + 8} + (-x + 3) \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 2x + 8) - (-x + 3)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 8 - x^2 + 6x - 9}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( 8 - \frac{1}{x} \right)}{x \left[ -\sqrt{1 + x + x^2} - 1 + x \right]} = -4$$

ومنه:  $y = -x - 4$  هي معادلة مستقيم مقارب مائل عند  $-\infty$ .

الحساب:

$$f(0) \approx -0,17 \quad \text{ومنه} \quad f(0) = \sqrt{8} - 3$$

$$f(2) = \sqrt{16} - 3 = 1$$

$$f(3) \approx 1,80 \quad , \quad f(3) = \sqrt{23} - 3$$

$$f(-2) \approx -0,17 \quad , \quad f(-2) = \sqrt{8} - 3$$

$$f(-4) = 1$$

$$f'(-5) \approx 1,80 \quad , \quad f(-5) = \sqrt{23} - 3$$

إنشاء (C) :

