PREMIÈRE ES/L

POLYNÔMES ET ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

1. POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

DÉFINITION

On appelle **polynôme (ou trinôme) du second degré** toute expression pouvant se mettre sous la forme :

$P\left(x\right)=ax^2+bx+c$

où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$

EXEMPLES

- $P\left(x\right)=2x^2+3x-5$ est un polynôme du second degré.
- $P\left(x\right)=x^2-1$ est un polynôme du second degré avec $b=0$ mais $Q\left(x\right)=x-1$ n'en est pas un car a n'est pas différent de zéro : c'est un polynôme du premier degré (ou une fonction affine)
- $P\left(x\right)=5\left(x-1\right)\left(3-2x\right)$ est un polynôme du second degré car en développant on obtient une expression du type souhaité.

THÉORÈME ET DÉFINITION

Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme :

$P\left(x\right)=a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$

avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=P\left(\alpha\right)$

Cette expression s'appelle **forme canonique** du polynôme P.

EXEMPLE

Soit $P\left(x\right)=2x^2+4x+5$

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2\times 2}=-1$

$\beta=P\left(\alpha\right)=P\left(-1\right)=2\times\left(-1\right)^2+4\times\left(-1\right)+5=2-4+5=3$

La forme canonique de $P(x)$ est donc :

$P(x) = 2(x+1)^2 + 3$

2. EQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

DÉFINITION

On appelle **racine** d'un polynôme $P(x)$ une solution de l'équation $P(x) = 0$

REMARQUE

Ne pas confondre les mots *"racine"* et *"racine carrée"* !

DÉFINITION

On appelle **discriminant** du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

THÉORÈME

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet **deux racines distinctes** : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet **une racine unique** : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, le polynôme P n'admet **aucune racine** réelle.

EXEMPLES

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$

  $\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$

  P_1 possède 2 racines :

  $x_1 = \dfrac{-3-1}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-3+1}{-2} = 1$
- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$

  $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 4 = 0$

P_2 possède une seule racine :

$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$

- $P_3\left(x\right) = x^2 + x + 1$

  $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

  P_3 ne possède aucune racine.

3. INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

THÉORÈME

Soit P(x) un trinôme du second degré de discriminant Δ

- Si $\Delta > 0$: $P\left(x\right)$ est du signe de a à l'extérieur des racines (c'est à dire si $x < x_1$ ou $x > x_2$) et du signe opposé entre les racines (si $x_1 < x < x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$: $P\left(x\right)$ est toujours du signe de a sauf en x_0 (où il s'annule).

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$: $P\left(x\right)$ est toujours du signe de a

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

EXEMPLES

Si l'on reprend les exemples précédents :

- $P_1\left(x\right) = -x^2 + 3x - 2$

  $\Delta > 0$ et $a < 0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$

  $\Delta = 0$ et $a > 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$+$	

- $P_3(x) = x^2 + x + 1$

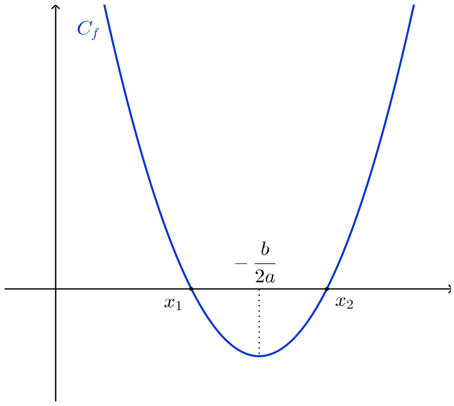
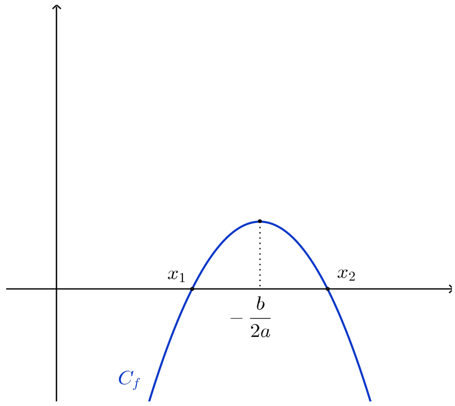
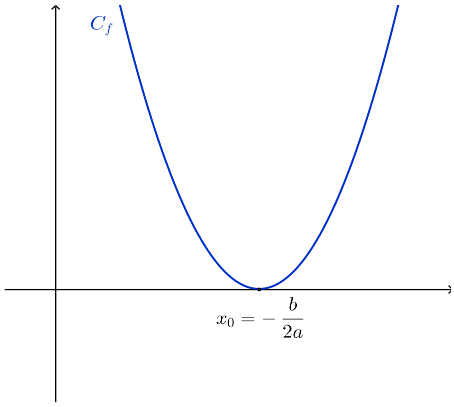
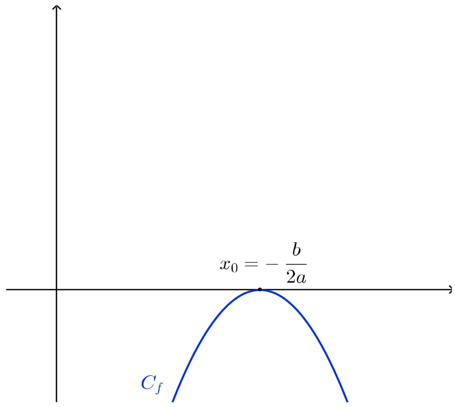
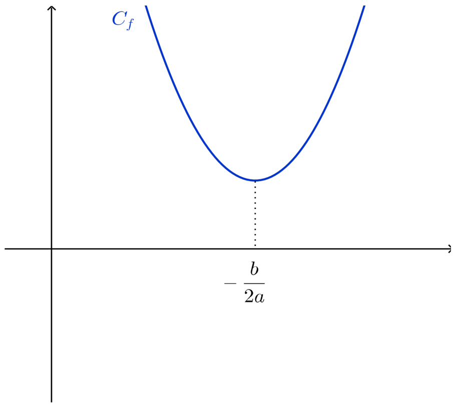
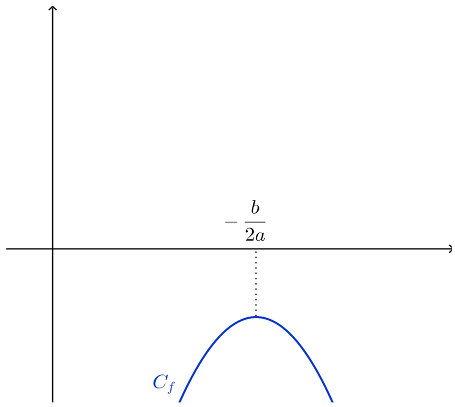
  $\Delta < 0$ et $a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	

4. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

On rappelle que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des **points d'intersection de la courbe** C_f et de l'**axe des abscisses**.

En regroupant les propriétés de ce chapitre et celles vues en Seconde on peut résumer ces résultats dans le tableau :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	 2 racines : x_1 et x_2	 2 racines : x_1 et x_2
$\Delta = 0$	 1 racine : x_0	 1 racine : x_0
$\Delta < 0$	 Pas de racine	 Pas de racine

© 2016 - Maths-cours.fr