

Composition du 1^{er} trimestre

Epreuve de Mathématiques

Exercice 1 : (5 points)

Etant donné un tétraèdre ABCD, on donne les points E et F tels que :

$$\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{BC} \text{ et } \overline{AF} = \overline{DE}$$

Les points I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].

1. Préciser la nature des quadrilatères ECIJ et ADEF.
2. Montrer que $2\overline{DJ} - \overline{DF} = \overline{JI}$
3. En déduire que les trois vecteurs \overline{DI} , \overline{DJ} et \overline{DF} sont coplanaires.
Quel résultat peut-on en conclure pour les points D, I, J et F ?

Exercice 2 : (4 points)

ABCD est un tétraèdre, I est un point de l'arête [BC] et J un point de l'arête [CD]. N est un point du segment [AJ] et M un point de la demi-droite [AI] extérieur au segment [AI].

1. Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?
2. a) Démontrer que les points M, N, I et J sont dans un même plan.
b) On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD).
- Prouver que P est sur (IJ).

Exercice 3 : (4 points)

Etudier les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x^2} - 1\right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 15)$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x(x - 4))$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{2x^2 - 1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x-1}\right)$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x + \frac{1}{x-1}\right) - x\right)$

Exercice 4 : (4 points)

- 1) a. Vérifier que : $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
b. Déterminer les couples (x, y) vérifiant :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

- 2) x_1 et x_2 sont les racines du polynôme :
 $P(x) = x^2 - x - 6$ Former une équation du second degré admettant :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1^2 + x_2}{x_1} \\ y_2 = \frac{x_2^2 + x_1}{x_2} \end{cases}$$

Comme solutions.

- 3) Soit a et b des réels strictement positifs et distincts. Montrer que :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \text{ et } \frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Présentation et rédaction : 1 point

..... Fin

Composition du 1^{er} trimestre

Epreuve de Mathématiques

Exercice 1 : (5 points)

Etant donné un tétraèdre ABCD, on donne les points E et F tels que :

$$\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{BC} \text{ et } \overline{AF} = \overline{DE}$$

Les points I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].

4. Préciser la nature des quadrilatères ECIJ et ADEF.
5. Montrer que $2\overline{DJ} - \overline{DF} = \overline{JI}$
6. En déduire que les trois vecteurs \overline{DI} , \overline{DJ} et \overline{DF} sont coplanaires.
Quel résultat peut-on en conclure pour les points D, I, J et F ?

Exercice 2 : (4 points)

ABCD est un tétraèdre, I est un point de l'arête [BC] et J un point de l'arête [CD]. N est un point du segment [AJ] et M un point de la demi-droite [AI] extérieur au segment [AI].

1. Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?
2. a) Démontrer que les points M, N, I et J sont dans un même plan.
b) On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD).
- Prouver que P est sur (IJ).

Exercice 3 : (4 points)

Etudier les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x^2} - 1\right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 15)$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x(x - 4))$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{2x^2 - 1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x-1}\right)$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x + \frac{1}{x-1}\right) - x\right)$

Exercice 4 : (4 points)

- 1) a. Vérifier que : $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
b. Déterminer les couples (x, y) vérifiant :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

- 2) x_1 et x_2 sont les racines du polynôme :
 $P(x) = x^2 - x - 6$ Former une équation du second degré admettant :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1^2 + x_2}{x_1} \\ y_2 = \frac{x_2^2 + x_1}{x_2} \end{cases}$$

Comme solutions.

- 3) Soit a et b des réels strictement positifs et distincts. Montrer que :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \text{ et } \frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Présentation et rédaction : 1 point

..... Fin