ECOLES PRIVEES
ELMAARIF- ERRAJA

مدارس
الرجاء والمعارف الحرة

BAC BLANC	**EPREUVE DE MATHS**	
Classes :7C	**Durée : 4H**	**21/12/2016**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (3 points)

1) On considère dans Z^2 l'équation (E) : $6x + 11y = 2013$.

a) Montrer que pour tout couple (x, y) solution de (E), x est un multiple de 11 et y un multiple de 3.

b) Vérifier que le couple (0,183) est une solution particulière de (E).

c) Résoudre (E).

2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x, y) est une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b) Déterminer, s'ils existent, les couples (p, q) d'entiers naturels tels que 6m + 11d = 2013, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

Exercice 2 (4 points)

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a_n = n^3 - n^2 - 12n$ et $b_n = 2n^2 - 7n - 4$.

1) Montrer, après factorisation, que a_n et b_n sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2) On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note d le PGCD de α et β.

a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.

b) Démontrer que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est un multiple de 5

3) Montrer que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.

4-a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a_n et b_n.

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 7$.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $1078x + 161y = 35$.

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Calculer $(3+4i)^2$.

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - (9+4i)z + 18 + 12i = 0$.

2) On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2+2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z-2-2i)(z^2 + az + b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\mathrm{Im}(z_A) < \mathrm{Im}(z_B) < \mathrm{Im}(z_C)$.

a) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-3),(C;3)\}$ et placer les points A ,B ,C et G.

c) Donner l'expression complexe de la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

<u>Exercice 4 (4 points)</u>

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ **et** $E(\theta)$ **l'équation :** $z^2 - 2ize^{i\theta} - 4(1-i)e^{2i\theta} = 0$ **.**

1.a) Résoudre $E(\theta)$ **, on note** z' **et** z'' **les solutions telles que** $|z'| > |z''|$ **.**

b) Mettre sous forme exponentielle le nombre z' **.**

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ **. On considère les ponts** A, B, C **d'affixes respectives** $2e^{i\theta}, -2(1-i)e^{i\theta}$ **et** $2ie^{i\theta}$ **.**

a) Déterminer le lieu géométrique Γ **du point A lorsque** θ **décrit** $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que $OACB$ **est un parallélogramme.**

c) A partir d'une position donnée de A sur Γ **, placer les points B et C. Justifier la construction.**

3) On considère l'équation $E'(\theta)$: $(\sqrt{2}z-1)^3 = (-2+2i)e^{i\theta}z^3$.

a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $V = (-2+2i)e^{i\theta}$ **.**

b) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ **. On pose** $\frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{ix}$ **.**

Montrer que $z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i\cot\frac{x}{2}\right)$ **.**

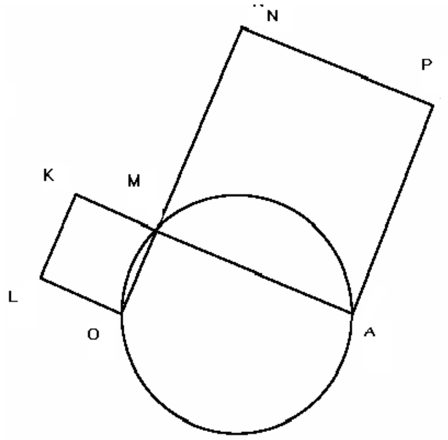
En déduire les solutions de l'équation $E'(\theta)$ **.**

<u>Exercice 5 (5 points)</u>

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle C de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle C , et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-contre.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et démontrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1. On note k, l ,m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.



1) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle C , on a $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ **.**

2) Écrire en fonction de m chacun des nombres complexes k,l,n et p.

3. a) Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle C .

b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle C et préciser sa position sur ce cercle.

4. a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5) Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

Fin.