7C	DEVOIR DE MATHS	DUREE 4H	18/02/2013

Présentation et rédaction : 2 points

Exercice 1 (3 points)

Dans le plan complexe, soit ABCD un parallélogramme direct de centre O. On considère les points $O_1;O_2;O_3;O_4$ du plan tels que chacun des triangles O_1AB; O_2BC; O_3CD; O_4DA soit direct, rectangle isocèle en O_i où $1 \le i \le 4$. On se propose de déterminer la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$.On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'origine O centre du parallélogramme ABCD. Soient $\omega_1;\omega_2;\omega_3;\omega_4;a;b;c;d$ les affixes respectives des points $O_1;O_2;O_3;O_4;A;B;C;D$.

1) Faire une figure illustrant la configuration précédente.

2.a) Ecrire $\omega_1;\omega_2$ en fonction de a et b.

b) Montrer que $\omega_1+\omega_3=0;\quad \omega_2+\omega_4=0$. Déduire.

c) Calculer $\dfrac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1-\omega_4}$. En déduire la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z)=z^3-(4-2i)z^2+(4-6i)z-4+8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z+2i)(z^2+az+b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$.

3) On pose $Z=\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $\arg Z=\dfrac{\pi}{2}\quad[\pi]$ b) $2\arg Z=2(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\quad[2\pi]$ c) $|Z|=2$

Exercice 3 (5 points)

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=(a+\frac{1}{2}i)z+4-4a-2i,\qquad a\in\mathbb{C}$$

1) Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

a) $a=1-\dfrac{1}{2}i$ b) $a=2-\dfrac{1}{2}i$ c) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $a=\dfrac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a\in\mathbb{R}$ et on note $\theta=\arg(a+\frac{1}{2}i)$. Soit les points $M_0(3;0)$ et $\Omega(4;0)$.
Pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$ on pose $M_{n+1}=f_a(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.
a) Calculer et écrire sous forme algébrique : z_1 et z_2 en fonction de a.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $z_n=4-\left(\frac{1}{2\sin\theta}\right)^n e^{in\theta}$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose : $V_n=|z_n-4|$. Pour quelles valeurs de θ ; la suite (V_n) est elle convergente ?

d) Calculer en fonction de n : $d_n=\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}d_k$.

e) Pour $a=\frac{1}{2}$; déterminer la nature du triangle ΩM_nM_{n+1}. Placer les points M_0 ; M_1 et M_2. Calculer S_n et $\lim_{n\to\infty}S_n$ puis interpréter géométriquement.

Exercice 4 (5 points)

Soit f l'application de $E=C\setminus\{-i\}$ dans $F=C\setminus\{i\}$ qui à tout z associe $z'=f(z)=\frac{iz}{z+i}$.
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on note M et M' les points d'affixes z et z' respectivement.
1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :
a) $|f(z)|=2$ b) $|f(z)-i|=2$ c) $f(z)$ est imaginaire pur d) $\arg f(z)=\frac{\pi}{3}\ [\pi]$.
2) Dans cette question on suppose que M décrit le cercle Γ de centre $\Omega(0,-1)$ et de rayon r ou r>0 .
a) Montrer que $(z'-i)(z+i)=1$, en déduire le lieu géométrique Γ' du point M'.
b) Construire Γ et Γ' dans le cas où $r=1$. Que peut on dire de Γ et Γ' ?
c) Dans le cas où $r=1$; à partir d'une position donnée de M sur Γ ; distinct de O, donner une construction de M'. Justifier.
3) Montrer que f est une bijection, donner sa bijection réciproque; puis vérifier que : $\forall z\in F,\quad f^{-1}(z)=-f(-z)$.
4) Démontrer que, si $f(z)=e^{i\theta}$ avec $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z$, alors $z=\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)-i\right)$.
5) Déduire de ce qui précède une méthode de résolution de l'équation : $(iz)^5=16(1+i\sqrt{3})(z+i)^5$.

Bonus : DM 3points

Fin.