7C	DEVOIR DE MATHS Algèbre	DUREE 4H	12/12/2012

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

Exercice 1 (4 points)

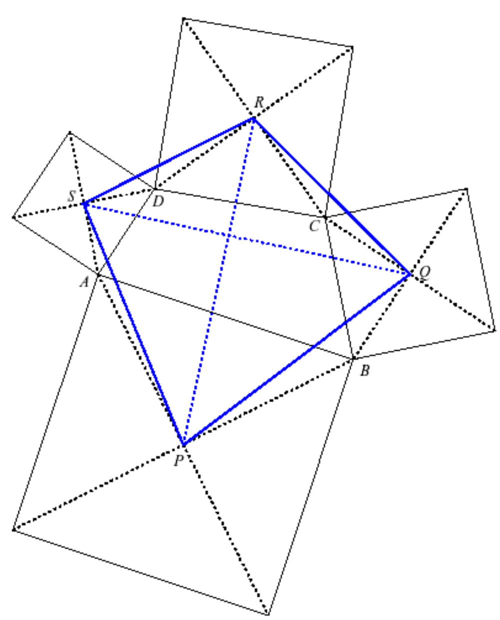
1. **Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.**
2. **Trouvez le reste de la division euclidienne de 2014^{2013} par 7.**
3. **Soit $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$.**
   a) **Montrez que pour tout entier naturel n, X est divisible par 7.**
   b) **Montrez que pour tout entier naturel n, X est divisible par 25.**

Exercice 2 (4 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x + 28y = 1$.
2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x + 28y = 414$.
3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
On donne les points A(−30 ; 48) et B(82 ; -76). On appelle (D) la droite (AB).
a. Trouver l'ensemble des points M(x ; y) de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.
b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de –10 à +10 en abscisses et de –14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.
c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à [−40 ; +40] en abscisses et à [−50 ; +10] en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

Exercice 3 (3 points)

Soit ABCD un quadrilatère convexe direct. On construit quatre carrés de centres respectifs P,Q,R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés [AB],[BC,[CD],[DA].
On considère un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ dans lequel les points A, B, C , D , P,Q,R et S ont pour affixes respectives a, b, c , d, p,q,r et s.



1) Le but de cette question est de démontrer que les segments [QS] et [PR] sont perpendiculaires et de même longueur.
a) Démontrer que dans le carré construit sur [AB] on a: $p = \dfrac{a - ib}{1 - i}$.
b) Etablir des relations analogues pour q,r et s.
c) Calculer $\dfrac{s - q}{r - p}$. Conclure.
2) Démontrer que les quadrilatère ABCD et PQRS ont le même centre de gravité.
3) Démontrer que si le quadrilatère PQRS est un carré, alors ABCD est un parallélogramme.

Exercice 4 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z)=z^3-(4-2i)z^2+(4-6i)z-4+8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z+2i)(z^2+az+b)$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\dfrac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur.

Exercice 5 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par A le point d'affixe i. À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z'=\dfrac{-z^2}{z-i}$. On note $f(M)=M'$.

1.a) Résoudre l'équation z'=z. En déduire les points M confondus avec leur image M'.
b) Montrer qu'ils existent deux points dont l'image est A. Déterminer leurs affixes.
c) Soit Δ l'axe des imaginaires purs; montrer que pour tout point M de Δ distinct de A, M' appartient à Δ.
2) Étant donné un complexe z distinct de i, on pose : $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec x, y, x', y' réels.

Montrer que : $x'=\dfrac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$. En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble E.

3) Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM'. En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner F sur la figure précédente.

4) Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$. $M'=f(M)$, et G le centre de gravité du triangle AMM'.

a) Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.
Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

b) Après avoir comparé les angles $(\vec{u};\overrightarrow{OG})$ et $(\vec{u};\overrightarrow{AM})$, effectuer la construction de G a partir d'une position donnée de M. En déduire celle de M'.

5) Dans cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique). Montrer que M' est situé à l'extérieur d'un disque de centre O dont on précisera le rayon.

Fin.