DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7C	*Durée :4H*	*Proposé le 30 avril 2017 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) : $11x-7y=25$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(8,9)$ est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25.

b) Soit m un entier relatif. Existe-t il des valeurs de m telles que le quotient $\dfrac{20+11m}{15+7m}$ soit un entier relatif ?

Exercice 2 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(2\sin\theta+i)z^2+(1+2i\sin\theta)z-i$ où $\theta\in[0;2\pi[$.

1) Calculer $P(i)$ puis déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z)=0$ sachant que z_0 est imaginaire pur, et $\operatorname{Im} z_1\geq 0$ si $\cos\theta\geq 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Déterminer, lorsque θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, le lieu géométrique Γ des points M_1 et M_2.

a) Calculer l'aire du triangle $M_0M_1M_2$ en fonction de θ.

b) Pour quelles valeurs de θ l'aire $A(\theta)$ est maximale ? Justifier.

c) Pour quelles valeurs de θ le quadrilatère $OM_0M_1M_2$ est un parallélogramme.

3.a) On suppose que $\theta=\dfrac{\pi}{6}$. Placer les points M_0, M_1 et M_2 sur le repère.

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ' des points M du plan tels que : $MM_0{}^2-MM_1{}^2+MM_2{}^2=1$

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O et de coté a ($a>0$).

I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en O et J en L.

c) Déterminer un angle et le centre de cette rotation.

2) Soit $f=r\circ S_{BC}$

a) Vérifier que $f=S_{IJ}\circ S_{AB}\circ S_{BC}$ et déterminer $f(B)$ et $f(J)$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f et donner sa forme réduite.

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme I en O et B en C .

b) Déterminer un angle et le rapport de s_1.

c) Déterminer $s_1(A)$ que peut-on en déduire à propos du centre de s_1.

d) Déterminer $s_1(O)$ puis construire l'image du carré ABCD par s_1. Justifier la construction.

4) Soit s_2 la similitude directe qui transforme C en L et D en I .

a) Déterminer un angle et le rapport de s_2.

b) Déterminer l'image du triangle OCD par s_2. Que peut on déduire ?

c) On pose $f=s_2\circ s_1$. Déterminer $f(B)$ et caractériser f .

5.a) Vérifier que O est le barycentre du système $\{(C,1);(L,2);(D,-1)\}$.

b) Déterminer et construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan tels que :

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow MC^2 + 2ML^2 - MD^2 = a^2$,

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{ML} - \overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{MK})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MK}) = 0$.

c) Déterminer deux homothéties transformant Γ_1 en Γ_2.

Exercice 4(4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$.

3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(t)dt$ où α est le réel trouvé en 2.b)

a) Justifier que $I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$.

b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$.

d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ?

4.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha^{n+1} \le I_n \le \frac{\alpha}{2^n}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} I_n$.

b) Montrer que $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$.En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$.

Exercice 5 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{6}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Vérifier que f est impaire et que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions dont l'une α vérifie $2,8 < \alpha < 2,9$

2.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera.

b) Vérifier que pour tout réel x : $(f(x))^2 - (f'(x))^2 = -\frac{1}{9}$. En déduire l'expression de $(f^{-1})'(x)$.

c) Soit x un réel quelconque. Exprimer l'intégrale $I(x) = \int_0^x \frac{3}{\sqrt{9t^2+1}}dt$ en fonction de $(f^{-1})(x)$.

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour tout point M(x,y) on note $r(M) = M'$ et $r(C) = C_1$

a) Donner l'expression complexe de la rotation r puis écrire les coordonnées x',y' de M' en fonction de x et y.

b) Montrer que (C_1) est la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \ln(-3x + \sqrt{9x^2+1}).$$

c) Montrer que pour tout réel x , $h(-x) = f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère précédent.

4.a) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en deux points autres que l'origine.

b) Construire, dans le même repère les courbes (C) et (C') et calculer en fonction de α l'aire du domaine plan délimité par ces deux courbes (α est le nombre indiqué en 1.d).

Fin.